Prácticas para Resolver

PROBLEMAS MATEMÁTICOS

V. Litvinenko,

A. Mordkóvich

Algebra y Trigonometría

Editorial Mir Moscú

Prácticas para Resolver

PROBLEMAS MATEMÁTICOS

В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Алгебра

Тригонометрия

Москва «Просвещение»

Prácticas para Resolver

PROBLEMAS MATEMÁTICOS

V. Litvinenko,

A. Mordkóvich

Algebra y Trigonometría



Editorial Mir Moscú

Traducido del ruso por el ingeniero
Antonio Ballesteros Elías

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-000697-4

Indice

Prólogo

El presente manual está dirigido a los estudiantes de las facultades fisicomatemáticas de las Escuelas Normales Superiores que estudian la especialidad N° 2104 «Matemáticas» y «Matemáticas y física». Ha sido escrito en correspondencia con el programa en vigor del curso «Prácticas para resolver problemas matemáticos».

Al escribir el libro los autores han procurado que en él estén reflejados los tipos fundamentales de problemas escolares de álgebra y trigonometría (en el manual hay cerca de 2000 ejemplos, problemas, ejercicios). De ellos, 1700 son ejercicios de diversa complejidad para el trabajo individual (junto con los problemas relativamente sencillos, hay otros cuya solución requiere un serio trabajo, en ocasiones no estándar). La resolución de semejantes problemas ayudará a que el estudiante adquiera la cualidad profesional más importante del futuro maestro de matemáticas: la capacidad de resolver los problemas de matemáticas del curso escolar.

El libro que ofrecemos al lector es no sólo y no tanto un compendio de problemas, sino un libro de prácticas. Esto se refleja en la estructura del libro. Cada apartado contiene, en forma informativa, el material teórico necesario y una cantidad bastante grande (cerca de 300) ejemplos detalladamente analizados, útiles a los estudiantes desde el punto de vista metodológico.

Al trabajar con el presente material los autores se han basado en la serie de manuales para el curso «Prácticas para resolver problemas matemáticos» escritos para los estudiantes por correspondencia en diversos años. Al escribir el presente manual fueron también empleados los libros de texto y los manuales escolares, libros para los maestros, diversos compendios de problemas de álgebra y trigonometría, manuales para los estudiantes que ingresan en los centros de enseñanza superior, las variantes de los problemas de matemáticas para los exámenes de ingreso a distintos centros de enseñanza superior, los materiales de las olimpiadas escolares de matemáticas.

Los autores

Capítulo I

TRANSFORMACIONES IDÉNTICAS DE EXPRESIONES

§ 1. Descomposición de polinomios en factores

Para resolver muchos problemas algebraicos suele ser preciso representar el polinomio dado en forma del producto de dos o más polinomios o bien en forma del producto del polinomio por un monomio que contenga no menos de una variable. No obstante, no cada polinomio permite realizar la descomposición en factores sobre el campo de números reales. P.ej., los polinomios $x + 3$, $x^2 + 6x + + 10$ no pueden ser descompuestos en factores. Semejantes polinomios reciben el nombre de *no reducibles*. Se considera que la descomposición de polinomios en factores está terminada si los polinomios obtenidos son no reducibles.

Durante la descomposición de polinomios en factores se hace uso de diversos procedimientos: sacando el factor común de los paréntesis, mediante la agrupación, empleando las fórmulas de multiplicación abreviada, etc. Examinemos varios ejemplos de aplicación de estos procedimientos.

EJEMPLO 1. Descompongamos el polinomio en factores

1. $f(a, b) = a^2 - 2a^3b - 2ab^3 + b^2$,
2. $f(a) = a^3 - 7a^2 + 7a + 15$.

SOLUCIÓN. 1) P.ej., unamos los sumandos extremos en un grupo y los medios, en otro y en el segundo grupo sacamos de los paréntesis el factor común. Obtenemos:

$$f(a, b) = (a^2 + b^2) - 2ab(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)(1 - 2ab).$$

2) Representemos los términos segundo y tercero del polinomio prefijado de la forma siguiente: $-7a^2 = -3a^2 - 4a^2$, $7a = 12a - - 5a$.

Entonces escribimos: $f(a) = a^3 - 3a^2 - 4a^2 + 12a - 5a + 15$. Agrupamos los sumandos a pares y en cada grupo sacamos de los paréntesis los factores comunes:

$$f(a) = (a^3 - 3a^2) - (4a^2 - 12a) - (5a - 15) =$$
$$= a^2(a - 3) - 4a(a - 3) - 5(a - 3) = (a - 3)(a^2 - 4a - 5).$$

Queda por descomponer en factores el polinomio $a^2 - 4a - 5$. Esto es posible de realizar con dos procedimientos.

1-er procedimiento. Tenemos: $a^2 - 4a - 5 = a^2 + a - 5a - 5 = a(a+1) - 5(a+1) = (a+1)(a-5)$.

2-do procedimiento. De la ecuación $a^2 - 4a - 5 = 0$ hallamos las raíces: $a_1 = -1$, $a_2 = 5$. Empleando la fórmula de descomposición en factores de un trinomio cuadrático ($ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$), obtenemos: $a^2 - 4a - 5 = (a - a_1) \times (a - a_2) = (a+1)(a-5)$.

Así, pues, $f(a) = (a-3)(a+1)(a-5)$.

EJEMPLO 2. Descompongamos en factores

$$f(a, b, c) = ab(a+b) - bc(b+c) + ac(a-c).$$

Solución. Aprovechemos que la expresión en los primeros paréntesis es la suma de las expresiones contenidas en los paréntesis segundo y tercero: $a + b = (b+c) + (a-c)$. Entonces

$$f(a, b, c) = ab((b+c) + (a-c)) - bc(b+c) + ac(a-c) = \\ = ab(b+c) + ab(a-c) - bc(b+c) + ac(a-c).$$

A continuación, efectuamos la agrupación de los términos y sacamos de los paréntesis el factor común. Obtenemos:

$$f(a, b, c) = (ab(b+c) - bc(b+c)) + (ab(a-c) + ac(a-c)) = \\ = (b+c)(ab - bc) + (a-c)(ab + ac) = (b+c)b(a-c) + \\ + (a-c)a(b+c) = (a-c)(b+c)(a+b).$$

EJEMPLO 3. Descompongamos en factores

$$f(a) = a^3 - 5a^2 - a + 5.$$

SOLUCIÓN. Realicemos la agrupación y, después, saquemos de los paréntesis el factor común:

$$f(a) = (a^3 - 5a^2) - (a-5) = a^2(a-5) - (a-5) = \\ = (a-5)(a^2-1).$$

Empleando seguidamente la fórmula $p^2 - q^2 = (p-q)(p+q)$, obtenemos:

$$f(a) = (a-5)(a-1)(a+1).$$

EJEMPLO 4. Descompongamos en factores:

$$f(a, b) = 4a^2 - 12ab + 5b^2.$$

SOLUCIÓN. Completamos el binomio $4a^2 - 12ab$ hasta el cuadrado perfecto. Obtenemos: $(2a)^2 - 2(2a)(3b) + (3b)^2$. Entonces

$$f(a, b) = (4a^2 - 12ab + 9b^2) - 9b^2 + 5b^2 = \\ = (2a - 3b)^2 - (2b)^2 = (2a - 3b - 2b)(2a - 3b + 2b) = \\ = (2a - 5b)(2a - b).$$

EJEMPLO 5. Descompongamos en factores

$$f(a) = a^4 - 10a^2 + 169.$$

SOLUCIÓN. Advirtiendo que $a^4 + 169 = (a^2)^2 + 13^2$ y completando esta suma hasta el cuadrado perfecto, obtenemos

$$f(a) = (a^4 + 26a^2 + 169) - 26a^2 - 10a^2 = \\ = (a^2 + 13)^2 - (6a)^2 = (a^2 - 6a + 13)(a^2 + 6a + 13).$$

EJEMPLO 6. Descompongamos en factores

$$f(a, b) = a^6 + a^4 + a^2b^2 + b^4 - b^6.$$

SOLUCIÓN. Como $a^6 - b^6 = (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ y $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = (a^2 + ab + b^2) \times (a^2 - ab + b^2)$, entonces $f(a, b) = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)((a - b)(a + b) + 1) = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)(a^2 - b^2 + 1)$.

EJEMPLO 7. Descompongamos en factores

$$f(a) = a^3 + 9a^2 + 27a + 19.$$

SOLUCIÓN. Es fácil ver que hasta el cuadrado perfecto a la expresión $f(a)$ le falta 8. Por ello, podemos escribir $f(a) = (a^3 + 9a^2 + 27a + 27) - 8 = (a + 3)^3 - 2^3 = (a + 3 - 2)((a + 3)^2 + (a + 3)\cdot 2 + 4) = (a + 1)(a^2 + 8a + 19)$.

EJEMPLO 8. Demostremos que si $a \in N$ y $f(a) = a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a$, $f(a) \vdots 24$ *.

SOLUCIÓN. Representemos $6a^3$ y $11a^2$ en forma de la suma de los términos semejantes: $6a^3 = a^3 + 5a^3$ y $11a^2 = 5a^2 + 6a^2$. Entonces $f(a) = a^4 + (a^3 + 5a^3) + (5a^2 + 6a^2) + 6a = (a^4 + a^3) + (5a^3 + 5a^2) + (6a^2 + 6a) = a^3(a + 1) + 5a^2(a + 1) + 6a(a + 1) = a(a + 1)(a^2 + 5a + 6) = a(a + 1)(a + 2)(a + 3)$. Pero de cuatro números naturales sucesivos, por lo menos uno de ellos se divide por 3, así como dos números son pares, es decir, uno de ellos se divide también por 4, por lo tanto, el producto de estos cuatro números se divide por $3\cdot 2\cdot 4$. Así, pues, $f(a) \vdots 24$.

EJEMPLO 9. Demostremos que si $f(a) = a^2(a^2 + 14) + 49$, donde a es un número impar, $f(a) \vdots 64$.

SOLUCIÓN. Notemos que $f(a) = a^4 + 14a^2 + 49 = (a^2 + 7)^2$. Como a es impar, $a = 2n - 1$, donde $n \in N$. Estonces, $f(a) = f(2n - 1) = ((2n - 1)^2 + 7)^2 = (4n^2 - 4n + 8)^2 = 16(n^2 - n + 2)^2$. La expresión obtenida se divide por 16. Por esta razón, para demostrar que $f(a) \vdots 64$ es suficiente demostrar que $(n^2 - n + 2)^2 \vdots 4$. Analicemos dos posibles casos: 1) n es un número par y 2) n es un número impar.

* Recordemos que el signo « $\vdots$ » significa «se divide por» (sin resto).

1) Si n es par, n^2 también lo es y, por lo tanto, $n^2 - n + 2$ es par, o sea, $(n^2 - n + 2) \vdots 2$ y, por consiguiente, $(n^2 - n + 2)^2 \vdots 4$, lo que significa que $f(a) \vdots 64$.

2) Si n es impar, n^2 también lo es, pero entonces $n^2 - n$ es par y $n^2 - n + 2$, también. Así, pues, en semejante caso $f(a) \vdots 64$.

EJERCICIOS

Descompongan en factores:

1. $a^4 - 1$. 2. $a^6 - 1$. 3. $a^9 + 1$. 4. $a^4 - 18a^2 + 81$.
5. $a^{12} - 2a^6 + 1$
6. $a^5 + a^3 - a^2 - 1$ 7. $a^4 + 2a^3 - 2a - 1$.
8. $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$.
9. $a^4 - a^2b^2 + b^4$ 10. $a^4 + 4a^2 - 5$.
11. $4a^4 + 5a^2 + 1$ 12. $c^4 - (1 + ab)c^2 + ab$.
13. $a^4 + 324$. 14. $a^4 + a^2 + 1$. 15. $a^8 + a^4 + 1$.
16. $2a^4 + a^3 + 4a^2 + a + 2$. 17. $a^4 + 3a^3 + 4a^2 - 6a - 12$.
18. $(a^2 + a + 3)(a^2 + a + 4) - 12$. 19. $a^6 + a^3 - a^2 - 1$.
20. $2a^2b + 4ab^2 - a^2c + ac^2 - 4b^2c + 2bc^2 - 4abc$.
21. $(ab + ac + bc)(a + b + c) - abc$.
22. $a(b - 2c)^2 + b(a - 2c)^2 - 2c(a + b)^2 + 8abc$.
23. $a^3(a^2 - 7)^2 - 36a$. 24. $(a + b)^5 - (a^5 + b^5)$.
25. $a^2b^2(b - a) + b^2c^2(c - b) + a^2c^2(a - c)$.
26. $8a^3(b + c) - b^3(2a + c) - c^3(2a - b)$.
27. $(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3)$.
28. $a^4 + 9$. 29. $a^4 + b^4$.
30. $a^3 + 5a^2 + 3a - 9$.
31. $a(a + 1)(a + 2)(a + 3) + 1$.
32. $(a + 1)(a + 3)(a + 5)(a + 7) + 15$.
33. $2(a^2 + 2a - 1)^2 + 5(a^2 + 2a - 1)(a^2 + 1) + 2(a^2 + 1)^2$.
34. $(a - b)c^3 - (a - c)b^3 + (b - c)a^3$.
35. $(a - b)^3 + (b - c)^3 - (a - c)^3$.
36. $(a^2 + b^2)^3 - (b^2 + c^2)^3 - (a^2 - c^2)^3$.
37. $a^4 + 2a^3b - 3a^2b^2 - 4ab^3 - b^4$.
38. $a^2b^2 + ab^2 + a^2c + b^2c + bc^2 + 3abc$.
39. $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$.
40. $a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$.
41. $a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1$.
42. $a^4 - 2a^3b - 8a^2b^2 - 6ab^3 - b^4$.
43. $a^4 + a^2 + \sqrt{2}a + 2$. 44. $a^{10} + a^5 + 1$.
45. Demuestren que si $a \in N$, $(a^5 - 5a^3 + 4a) \vdots 120$.
46. Demuestren que si a es un número mutuamente primo con 6, $(a^2 - 1) \vdots 24$.
47. Demuestren que si $a \in N$, $(2a^3 + 3a^2 + a) \vdots 6$.
48. ¿Con qué valores de $a \in N$ la expresión $a^4 + 4$ es un numero primo?
49. Demuestren que si a es un número par, $\frac{a}{12} + \frac{a^2}{8} + \frac{a^3}{24}$ es un número entero.
50. Demuestren que si $a \in N$, $\frac{a^5}{120} + \frac{a^4}{12} + \frac{7a^3}{24} + \frac{5a^2}{12} + \frac{a}{5}$ es un número entero.

§ 2. Transformaciones idénticas de expresiones racionales

La sustitución de una expresión analítica por otra idénticamente igual a ella en cierto conjunto, lleva el nombre de *transformación idéntica* en este conjunto de la expresión dada.

Al realizar transformaciones idénticas de una expresión es posible la variación de su campo de definición. P.ej., reduciendo los términos semejantes al simplificar la expresión

$$x^2 + 3x - 5 + \sqrt{x} - \sqrt{x}, \tag{1}$$

ampliamos su campo de definición: la expresión dada sólo está definida con $x \geqslant 0$, mientras que el polinomio obtenido después de la simplificación

$$x^2 + 3x - 5 \tag{2}$$

está definido con cualesquiera valores de x. Las expresiones (1) y (2) son idénticamente iguales sólo en el conjunto $[0; \infty[$.

El campo de definición de la expresión puede asimismo variar después de la simplificación de la fracción. Así, la fracción algebraica

$$\frac{x^3 - 1}{(x-1)(x+2)} \tag{3}$$

está definida con $x \neq 1$, $x \neq -2$. Después de simplificar por $(x - 1)$, obtenemos la fracción

$$\frac{x^2 + x + 1}{x + 2}, \tag{4}$$

definida con $x \neq -2$. Las expresiones (3) y (4) son idénticamente iguales en el conjunto $]-\infty; -2[\cup]-2; 1[\cup]1; \infty[$.

La variación del campo de definición de la expresión es también posible como resultado de ciertas otras transformaciones, por lo que, después de efectuar la transformación de la expresión dada, siempre hay que saber responder a la pregunta en qué conjunto ella es idéntica a la obtenida.

Una expresión algebraica lleva el nombre de *racional* si ella sólo contiene operaciones de sumar, multiplicar, restar, dividir y elevación a una potencia entera.

EJEMPLO 1. Simplifiquemos la expresión $f(a, b) = \frac{2a^2 + ab - b^2}{a + b}$.

SOLUCIÓN. Representando ab como la suma de los términos semejantes $2ab - ab$, obtenemos

$$2a^2 + ab - b^2 = 2a^2 + 2ab - ab - b^2 = 2a(a + b) - b(a + b) =$$
$$= (a + b)(2a - b).$$

Entonces $f(a, b) = \frac{(a + b)(2a - b)}{a + b} = 2a - b$.

La simplificación por $a + b$ se ha realizado partiendo de la condición de que $a + b \neq 0$. De modo que $f(a, b) = 2a - b$, si $a \neq -b$.

EJEMPLO 2 Simplifiquemos la expresión $f(a) = \frac{a^4 - 10a^2 + 169}{a^2 + 6a + 13}$.

SOLUCION Después de descomponer en factores el numerador, obtenemos (véase el ejem. 5, pág. 9): $a^4 - 10a^2 + 169 = (a^2 + 6a + 13) \times \times (a^2 - 6a + 13)$.

Por lo tanto, $f(a) = \frac{(a^2 + 6a + 13)(a^2 - 6a + 13)}{a^2 + 6a + 13} = a^2 - 6a + 13$.

Como $a^2 + 6a + 13$ no se reduce a cero con ningún valor real de a $(a^2 + 6a + 13 = (a + 3)^2 + 4 > 0)$, $f(a) = a^2 - 6a + 13$ con todos los valores de a.

EJEMPLO 3 Simplifiquemos la expresión

$$f(a) = \left(\frac{1}{a^2 + 3a + 2} + \frac{2a}{a^2 + 4a + 3} + \frac{1}{a^2 + 5a + 6}\right)^2 \frac{(a-3)^2 + 12a}{2}.$$

SOLUCION Realizando las operaciones indicadas, obtenemos:

$$f(a) = \left(\frac{a + 3 + 2a(a + 2) + a + 1}{(a + 1)(a + 2)(a + 3)}\right)^2 \cdot \frac{a^2 - 6a + 9 + 12a}{2} =$$

$$= \left(\frac{2a^2 + 6a + 4}{(a + 1)(a + 2)(a + 3)}\right)^2 \cdot \frac{a^2 + 6a + 9}{2} =$$

$$= 4\left(\frac{a^2 + 3a + 2}{(a^2 + 3a + 2)(a + 3)}\right)^2 \cdot \frac{(a + 3)^2}{2} = 2.$$

Así, pues, $f(a) = 2$ si $a \neq -1$, $a \neq -2$, $a \neq -3$.

EJEMPLO 4 Simplifiquemos la expresión

$$f(a, b, c) = \frac{a^2}{(a - b)(a - c)} + \frac{b^2}{(b - c)(b - a)} + \frac{c^2}{(c - a)(c - b)}.$$

SOLUCION Reduciendo todas las fracciones al mínimo común denominador, obtenemos:

$$f(a, b, c) = \frac{a^2(b - c) - b^2(a - c) + c^2(a - b)}{(a - b)(b - c)(a - c)}.$$

Advirtiendo que $b - c = (a - c) - (a - b)$, transformamos el numerador de la siguiente forma: $a^2(b - c) - b^2(a - c) + + c^2(a - b) = a^2(a - c) - a^2(a - b) - b^2(a - c) + c^2(a - b) = = (a - c)(a^2 - b^2) + (a - b)(c^2 - a^2) = (a - c)(a - b)(a + b - - c - a) = (a - b)(b - c)(a - c)$.

Así, pues, si $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$, $f(a, b, c) = 1$.

EJEMPLO 5 Demostremos que si $a + b + c = 0$,

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

SOLUCION Como $a + b + c = 0$, $a = -b - c$. Entonces, $a^3 + b^3 + c^3 = (-b - c)^3 + b^3 + c^3 = -(b + c)^3 + b^3 + c^3 = = -(b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3) + b^3 + c^3 = -(3b^2c + 3bc) = -3bc \times \times (b + c)$.

Pero $b+c=-a$. De modo que $a^3+b^3+c^3=-3bc(-a)=$ $=3abc$.

EJEMPLO 6. Demostremos que si $a+b+a=0$, donde $a\neq 0$; $b\neq 0$; $c\neq 0$, entonces

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9.$$

SOLUCIÓN. Consideremos el producto del primer factor en la primera fracción del segundo factor:

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\frac{c}{a-b}=1+\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\frac{c}{a-b}=$$
$$=1+\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}\cdot\frac{c}{a-b}=1+\frac{c(a-b)-(a^2-b^2)}{ab}\,\frac{c}{a-b}=$$
$$=1+\frac{(a-b)(c-(a+b))}{ab}\cdot\frac{c}{a-b}=1+\frac{c}{ab}(c-(a+b))$$

Pero según el planteamiento $a+b=-c$. Por ello, para el producto que consideramos, obtenemos $1+\frac{2c^2}{ab}$.

De forma análoga el producto del primer factor por la segunda fracción del segundo factor es igual a $1+\frac{2a^2}{bc}$, en tanto que por la tercera fracción, $1+\frac{2b^2}{ca}$. Sumemos los resultados obtenidos

$$1+\frac{2c^2}{ab}+1+\frac{2a^2}{bc}+1+\frac{2b^2}{ca}=3+2\left(\frac{c^2}{ab}+\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}\right)=$$
$$=3+\frac{2(c^3+a^3+b^3)}{abc}.$$

Como $a^3+b^3+c^3=3abc$ (vease el ejem. 5, pág. 12),

$$3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}=3+\frac{2\cdot 3abc}{abc}=9,$$

lo que teníamos que demostrar.

En los siguientes ejemplos las transformaciones idénticas de expresiones racionales actúan no como objetivo, sino como medio para resolver problemas en los que se hace uso del método de inducción matemática.

El indicado método se enuncia de la forma siguiente:

La afirmación dependiente de un número natural n, es válida para cualquier n, si se realizan dos condiciones:

a) *la afirmación es válida para $n=1$;*

b) *de la validez de la afirmación para $n=k$ (con cualquier valor natural de k) se desprende también su validez para $n=k+1$.*

La demostración según el método de inducción matemática se realiza así. Primero, la afirmación a demostrar se verifica para $n=1$.

Esta parte de la demostración recibe el nombre de *base* de la inducción. La siguiente parte de la demostración lleva el nombre de *paso de la inducción*. En ella se demuestra la validez de la afirmación para $n = k + 1$ en la suposición de la validez de la afirmación para $n = k$ (suposición de la inducción).

EJEMPLO 7. Demostremos que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

SOLUCIÓN. Para $n=1$ la afirmación es válida, ya que $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$. Supongamos que ella es correcta con $n=k$, es decir, $1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Demostremos que en tal caso ella también es correcta con $n=k+1$, o sea,

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

En efecto, $1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+ (k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Así se ha demostrado la validez de la afirmación para cualquier número natural n.

EJEMPLO 8. Demostremos que $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

SOLUCIÓN Con $n=1$ la afirmación es válida ya que $1^3=\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$. Supongamos que es correcta con $n=k$, es decir, $1^3+2^3+3^3+\ldots k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$. Demostremos que entonces también es correcta con $n=k+1$, o sea,

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

En efecto, $1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+ (k+1)^3=\frac{(k(k+1))^2+4(k+1)^3}{4}=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$.

De este modo queda demostrada la validez de la afirmación para cualquier número natural n.

EJEMPLO 9 Demostremos que la suma de los cubos de tres números reales sucesivos se divide por 9.

SOLUCIÓN. Demostremos que

$$(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3) \vdots 9 \qquad (5)$$

con cualquier n natural.

Ante todo comprobemos si la afirmación (5) es válida con $n = 1$. Tenemos: $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$, pero $36 \vdots 9$, por lo tanto, con $n = 1$ la afirmación es cierta.

Supongamos que la afirmación (5) es cierta con $n = k$, o sea,

$$(k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3) : 9.$$

Demostremos que en tal caso también es cierta con $n = k + 1$. En realidad, $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = (k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27 = (k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3) + 9(k^2 + 3k + 3)$. Como cada sumando de la suma obtenida se divide por 9 (el primer sumando según la suposición de inducción, el segundo por contener el factor 9), la suma también se divide por ese número. De acuerdo con el principio de la inducción matemática llegamos a la conclusión de que la afirmación es cierta con todas las $n \in N$.

EJEMPLO 10. Demostremos que

$$(3^{2n+1} + 40n - 67) \vdots 64 \qquad (6)$$

con cualquier n natural.

SOLUCIÓN. Si $n = 1$, $3^3 + 40 \cdot 1 - 67 = 0$, pero $0 \vdots 64$. Esto significa que con $n = 1$ la afirmación (6) es cierta. Supongamos que ella es cierta con $n = k$, o sea, $(3^{2k+1} + 40k - 67) \vdots 64$. Demostremos que entonces también es cierta con $n = k + 1$. En efecto, tenemos $3^{2k+3} + 40(k+1) - 67 = 9 \cdot 3^{2k+1} + 40k - 27 = 9(3^{2k+1} + 40k - 67) - 320k + 576 = 9(3^{2k+1} + 40k - 67) + 64(9 - 5k)$.

Cada sumando se divide por 64, por consiguiente, toda la suma se divide, asimismo, por 64. Así, pues, la afirmación (6) es cierta con todas las $n \in N$.

EJEMPLO 11. Demostremos que

$$(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) \vdots 24 \qquad (7)$$

con cualquier n natural.

SOLUCIÓN. Con $n = 1$ la afirmación es válida, ya que $1 + 6 + 11 + 6 = 24$ y $24 \vdots 24$.

Supongamos que la afirmación (7) es cierta con $n = k$, es decir, $(k^4 + 6k^3 + 11k^2 + 6k) \vdots 24$. Demostremos que entonces también es cierta con $n = k + 1$. Efectivamente, tenemos: $(k+1)^4 + 6(k+1)^3 + 11(k+1)^2 + 6(k+1) = (k^4 + 6k^3 + 11k^2 + 6k) + 24(k^2 + 1) + 4(k^3 + 11k)$.

Si ahora demostramos que

$$(k^3 + 11k) \vdots 6 \qquad (8)$$

con todas las k, quedará demostrado que la expresión prefijada se divide por 24. Ante nosotros ha surgido un nuevo problema. Para resolverlo de nuevo hacemos uso del método de inducción matemática.

Ante todo, comprobemos si es válida la afirmación (8) con $k = 1$. Esto es evidente: $(1 + 11) \vdots 6$. Sea la afirmación (8) cierta con $k = m$, es decir, $(m^3 + 11m) \vdots 6$. Demostremos que entonces también lo es con $k = m + 1$. En efecto,

$$(m + 1)^3 + 11 (m + 1) = (m^3 + 11m) + 12 + 3m (m + 1).$$

De dos números naturales sucesivos m, $(m + 1)$ uno de ellos es obligatoriamente par, por lo tanto, $(m (m + 1)) \vdots 2$, mientras que $(3m (m + 1)) \vdots 6$. Pero, en tal caso, $((m^3 + 11m) + 12 + 3m (m + 1)) \vdots 6$.

De aquí llegamos a la conclusión de que $(k^3 + 11k) \vdots 6$ con cualquier k natural. La afirmación (8) queda demostrada. Así, pues, la afirmación (7) es cierta para todas $n \in N$.

Hemos de indicar que el ejemplo examinado puede ser resuelto sin aplicar el método de inducción matemática.

EJERCICIOS

51. $\dfrac{5a^2 - a - 4}{a^3 - 1}$. 52. $\dfrac{a^6 + a^4 + a^2 + 1}{a^3 + a^2 + a + 1}$.

53. $\dfrac{a^4 + a^2 - 2}{a^6 + 8}$. 54. $\dfrac{a^4 - a^2 - 12}{a^4 + 8a^2 + 15}$.

55. $\dfrac{2a^4 + 7a^2 + 6}{3a^4 + 3a^2 - 6}$. 56. $\dfrac{5a^4 + 5a^2 - 3a^2b - 3b}{a^4 + 3a^2 + 2}$.

57. $\dfrac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{a^6 - b^6}$.

Simplifiquen las expresiones:

58. $\dfrac{1}{1 - a} - \dfrac{1}{1 + a} - \dfrac{2a}{1 + a^2} - \dfrac{4a^3}{1 + a^4} - \dfrac{8a^7}{1 + a^8}$.

59. $\dfrac{1}{1 - a} + \dfrac{1}{1 + a} + \dfrac{2}{1 + a^2} + \dfrac{4}{1 + a^4} + \dfrac{8}{1 + a^8} + \dfrac{16}{1 + a^{16}}$.

60. $\dfrac{1}{a (a + 1)} + \dfrac{1}{(a + 1) (a + 2)} + \dfrac{1}{(a + 2) (a + 3)} + \dfrac{1}{(a + 3) (a + 4)} + \dfrac{1}{(a + 4) (a + 5)}$.

61. $\dfrac{a}{a^2 - 1} + \dfrac{a^2 + a - 1}{a^3 - a^2 + a - 1} + \dfrac{a^2 - a - 1}{a^3 + a^2 + a + 1} - \dfrac{2a^3}{a^4 - 1}$.

62. $\left(\dfrac{b}{a + b} + a\right) \left(\dfrac{a}{a - b} - b\right) - \left(\dfrac{a}{a + b} + b\right) \left(\dfrac{b}{a - b} - a\right)$.

63. $\dfrac{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b + c}}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b + c}} \cdot \left(1 + \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$.

64. $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$.

65. $\dfrac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{c+a}{(a-b)(b-c)}$.

66. $\dfrac{a-c}{a^2+ac+c^2}\cdot\dfrac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2}\cdot\left(1+\dfrac{c}{a-c}-\dfrac{1+c}{c}\right):\dfrac{c(1+c)-a}{bc}$.

67. $\dfrac{\dfrac{a}{8b^3}+\dfrac{1}{4b^2}}{a^2+2ab+2b^2}-\dfrac{\dfrac{a}{8b^3}-\dfrac{1}{4b^2}}{a^2-2ab+2b^2}-\dfrac{1}{4b^2(a^2+2b^2)}+\dfrac{1}{4b^2(a^2-2b^2)}$.

68. $\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}+\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

69. $\dfrac{a^3b-ab^3+b^3c-bc^3+c^3a-ca^3}{a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2}$.

70. $\dfrac{(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3}{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}$.

71. Demuestren la identidad:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}.$$

72. Demuestren la identidad:

$$a^2\,\frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\,\frac{(d-c)(d-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\,\frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}=d^2.$$

73. Demuestren que si $a, b, c\in R$, de la igualdad $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=$ $=(a+b-2c)^2+(b+c-2a)^2+(c+a-2b)^2$ se deduce que $a=b=c$.

74. Demuestren que con $a\in R$ $(a-1)(a-3)(a-4)(a-6)+10$ es un número positivo.

75. Hallen el menor valor de la expresión $(a-1)(a-3)(a-4)(a-6)+10$.

76. Demuestren que si $a+b+c=0$, $\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

77. Demuestren que si $a+b+c=0$, $\dfrac{a^7+b^7+c^7}{7}=\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}\cdot\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

78. Demuestren que si $\dfrac{l}{a}+\dfrac{m}{b}+\dfrac{n}{c}=1$ y $\dfrac{a}{l}+\dfrac{b}{m}+\dfrac{c}{n}=0$, $\dfrac{l^2}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}+\dfrac{n^2}{c^2}=1$.

79. Demuestren que si $\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}=0$, donde $a\neq b$, $a\neq c$, $b\neq c$, entonces $\dfrac{a}{(b-c)^2}+\dfrac{b}{(c-a)^2}+\dfrac{c}{(a-b)^2}=0$.

80. Demuestren que si $a+b+c=0$, $a^5(b^2+c^2)+b^5(a^2+c^2)+(c^5b^2+a^2)=$ $=\dfrac{(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4)}{2}$.

Las siguientes identidades han de demostrarse según el método de inducción matemática *.

81. $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

---

* En los ejercicios 81—119 se supone que $n\in N$.

82. $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}$.

83. $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$.

84. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}$.

85. $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$.

86. $\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}$.

87. $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

88. $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2}{3\cdot 5\cdot 7}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$.

89. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.

90. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

91. $2\cdot 1^2+3\cdot 2^2+\ldots+(n+1)n^2=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$.

92. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=$
$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$.

93. $1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, donde $x\neq 1$.

94. $7+77+777+\ldots+\underbrace{777\ldots 7}_{n\text{ cifras}}=\frac{7(10^{n+1}-9n-10)}{81}$.

95. $(n+1)(n+2)\ldots(n+n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$.

96. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}$.

Deduzcan las fórmulas para las sumas:

97. $S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

98. $S_n=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

99. $S_n=\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$.

100. $S_n=\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$.

101. $S_n=1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2$.

Demuestren las identidades:

102. $x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n=\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$, donde $x\neq 1$.

103. $\frac{a+1}{2}+\frac{a+3}{4}+\frac{a+7}{8}+\ldots+\frac{a+2^n-1}{2^n}=\frac{(a-1)(2^n-1)}{2^n}+n$.

104. $\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$, donde $|x|\neq 1$.

105. $\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^8}+\ldots+\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-x^{2^n}}{1-x^{2^n}}$, donde $|x|\neq 1$.

106. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^n-\frac{1}{x^n}\right)^2=$

$=\frac{1}{x^2-1}\left(x^{2n+2}-\frac{1}{x^{2n}}\right)-2n-1.$

Demuestren la validez de las afirmaciones:

107. $(6^{2n}-1)\ \vdots\ 35.$ 108. $(4^n+15n-1)\ \vdots\ 9.$

109. $(2^{5n+3}+5^n\cdot 3^{n+2})\ \vdots\ 17.$ 110. $(6^{2n}+3^{n+2}+3^n)\ \vdots\ 11.$

111. $(3^{2n+2}-8n-9)\ \vdots\ 64.$ 112. $(3^{3n+2}+5\cdot 2^{3n+1})\ \vdots\ 19.$

113. $(2^{n+5}\cdot 3^{4n}+5^{3n+1})\ \vdots\ 37.$

114. $(7^{n+2}+8^{2n+1})\ \vdots\ 57.$ 115. $(11^{n+2}+12^{2n+1})\ \vdots\ 133.$

116. $(2^{n+2}\cdot 3^n+5n-4)\ \vdots\ 25.$ 117. $(5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1})\ \vdots\ 23.$

118. $(3^{2n+2}\cdot 5^{2n}-3^{3n+2}\cdot 2^{2n})\ \vdots\ 1053.$

119. $(n^6+3n^5+6n^4-7n^3-2n)\ \vdots\ 24.$

§ 3. Transformaciones idénticas de expresiones irracionales

Las expresiones algebraicas en las que hay extracción de la raíz de la variable o bien la elevación de ésta a potencia racional fraccionaria, llevan el nombre de *irracionales* con relación a dicha variable.

Recordemos la definición de raíz aritmética. Si $a \geqslant 0$ y $n \in N$, $n > 1$, sólo hay un número no negativo x tal que se realiza la igualdad $x^n = a$. Este número x se denomina *raíz aritmética de n-ésima potencia* del número no negativo a y se designa con $\sqrt[n]{a}$.

De lo dicho se desprende que la igualdad $\sqrt{49} = 7$ es cierta, en tanto que las igualdades $\sqrt{49} = -7$ o bien $\sqrt{49} = \pm 7$ son inciertas.

Si n es un número impar mayor que 1 y $a < 0$, por $\sqrt[n]{a}$ se entiende semejante número negativo x que $x^n = a$.

Si n, k, $m \in N$, $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$, entonces:

1ª. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}.$

Esta propiedad se propaga al producto de cualquier número de factores, p.ej., $\sqrt[3]{8\cdot 27\cdot 125}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{125}=2\cdot 3\cdot 5=30.$

2ª. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, si $b\neq 0.$

OBSERVACIÓN. Si $a<0$ y $b<0$ las propiedades 1ª y 2ª toman la forma:

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{|a|}\,\sqrt[n]{|b|};\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}.$$

3ª. $(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}$, p.ej., $(\sqrt[5]{a^2})^3=\sqrt[5]{(a^2)^3}=\sqrt[5]{a^6}$.

4ª. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$, p.ej., $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}=\sqrt[12]{a}$.

5ª. $\sqrt[mn]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^k}$, p.ej, $\sqrt{a^4}=\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[15]{a^3}=\sqrt[5]{a}$.

OBSERVACIÓN. Si los índices de las raíces son números impares, las propiedades 1ª—5ª también se realizan para $a<0$, $b<0$ y para $ab<0$.

Recordemos otra importante propiedad de la raíz aritmética: si n es un número par, es decir, $n=2k$, tiene lugar la identidad $\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$, p.ej., $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}=|\sqrt{3}-2|=2-\sqrt{3}$.

Recordemos la definición de potencia con exponente racional.

1) Si $a\neq 0$, $a^0=1$.

2) Si $a\geqslant 0$, $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ (n, m son números naturales, $n\geqslant 2$).

3) Si $a>0$, $a^{-r}=\frac{1}{a^r}$ (r es un positivo racional).

4) Si $a<0$, $m\in Z$, $a^{-m}=a^{\frac{1}{m}}$.

Enumeremos las propiedades fundamentales de las potencias con exponentes arbitrarios racionales:

1ª. $a^r\cdot a^s=a^{r+s}$.

2ª. $(a^r)^s=a^{rs}$.

3ª. $(ab)^r=a^r\cdot b^r$.

4ª. $\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$.

5ª. $\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$,

donde $a>0$, $b>0$, r y s son números arbitrarios racionales.

EJEMPLO 1. Simplifiquemos la expresión

$$A=(\sqrt{32}+\sqrt{45}-\sqrt{98})(\sqrt{72}-\sqrt{500}-\sqrt{8}).$$

SOLUCIÓN. Primero simplifiquemos cada uno de los radicales dados:

$$\sqrt{32}=\sqrt{16\cdot 2}=4\sqrt{2},\ \sqrt{45}=\sqrt{9\cdot 5}=3\sqrt{5},\ \sqrt{98}=\sqrt{49\cdot 2}=7\sqrt{2},$$

$$\sqrt{72}=\sqrt{36\cdot 2}=6\sqrt{2},\ \sqrt{500}=\sqrt{100\cdot 5}=10\sqrt{5},$$

$$\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=2\sqrt{2}.$$

Después de esto la expresión prefijada toma la forma:

$$A=(4\sqrt{2}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})(6\sqrt{2}-10\sqrt{5}-2\sqrt{2})=$$
$$=(3\sqrt{5}-3\sqrt{2})(4\sqrt{2}-10\sqrt{5}).$$

Después, obtenemos:

$$A=12\sqrt{10}-24-150+30\sqrt{10}=42\sqrt{10}-174=$$
$$=6(7\sqrt{10}-29).$$

EJEMPLO 2. Simplifiquemos la expresión

$$A=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\times$$
$$\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

SOLUCIÓN. Multipliquemos primero los factores tercero y cuarto:

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=$$
$$=\sqrt{4-\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2}=\sqrt{4-(2+\sqrt{2+\sqrt{3}})}=$$
$$=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

Multipliquemos el resultado obtenido por el segundo factor:

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{4-(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2}=$$
$$=\sqrt{4-(2+\sqrt{3})}=\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Multipliquemos este resultado por el primer factor:

$\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{4-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4-3}=1$. Así, pues, $A=1$.

EJEMPLO 3. Simplifiquemos la expresión $A=\sqrt[8]{(2-\sqrt{7})^4}$.

SOLUCIÓN. De acuerdo con la propiedad 5ª de las raíces obtenemos $A=\sqrt{|2-\sqrt{7}|}$. Pero $2-\sqrt{7}<0$ y, por lo tanto $A=$ $=\sqrt{-(2-\sqrt{7})}=\sqrt{\sqrt{7}-2}$.

EJEMPLO 4. Simplifiquemos la expresión $A=\sqrt{27-10\sqrt{2}}$.

SOLUCIÓN. Está claro que la expresión se simplificará si resulta que bajo el signo de la raíz tenemos el cuadrado perfecto de la diferencia entre ciertos dos números. Representemos $10\sqrt{2}$ como el producto doble de dos números, la suma de cuyos cuadrados sea igual a 27, es decir, $10\sqrt{2}=2\cdot\sqrt{2}\cdot5$.

De este modo, $A=\sqrt{2-2\sqrt{2}\cdot 5+25}=\sqrt{(\sqrt{2}-5)^2}=|\sqrt{2}-5|$ y como $\sqrt{2}-5<0$, $A=5-\sqrt{2}$.

EJEMPLO 5. Simplifiquemos la expresión $A=\sqrt[3]{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}$.

SOLUCION Razonando como en el anterior ejemplo, escribamos el radicando en forma del cubo perfecto de la diferencia entre dos ciertos números. Tenemos $9\sqrt{3}=3\sqrt{3}+6\sqrt{3}=(\sqrt{3})^3+3\cdot\sqrt{3}\cdot(\sqrt{2})^2$ y $11\sqrt{2}=9\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3(\sqrt{3})^2\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^3$.

De esta forma,

$$A=\sqrt[3]{(\sqrt{3})^3-3(\sqrt{3})^2\sqrt{2}+3\sqrt{3}(\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^3}=$$
$$=\sqrt[3]{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

EJEMPLO 6. Liberémonos de la irracionalidad en el numerador de la fracción $A=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$.

SOLUCION Multiplicando el numerador y denominador de la fracción por el «cuadrado no perfecto» de la suma de los números $\sqrt[3]{2}$ y 1, obtenemos:

$$A=\frac{(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2}-1)((\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1)}=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{(\sqrt[3]{2})^3-1^3}=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1.$$

EJEMPLO 7. Liberémonos de la irracionalidad en el denominador de la fracción $A=\frac{3}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

SOLUCIÓN Liberémonos de $\sqrt{3}$ en el denominador. Con este fin, multiplicamos el numerador y denominador de la fracción por la expresión adjunta al denominador:

$$A=\frac{3(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\frac{3(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-3}=$$
$$=\frac{3(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}.$$

Ahora, nos liberamos de $\sqrt{2}$ en el denominador:

$$A=\frac{3(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{3(\sqrt{2}+2+\sqrt{6})}{4}.$$

EJEMPLO 8. Calculemos la suma $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$.

SOLUCIÓN. Hagamos $A=\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$ y elevemos al cubo los dos miembros de esta igualdad. Obtenemos:

$$(20+\sqrt{392})+3\left(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}\right)^2\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}+3\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}\times$$
$$\times\left(\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}\right)^2+(20-\sqrt{392})=A^3,$$

o bien $40+3\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}\cdot\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}\cdot(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+$ $+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}})=A^3$, donde $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}=A$.

De esta forma, obtenemos: $40+3\sqrt[3]{20^2-(\sqrt[3]{393})^2}\cdot A=A^3$, $40+$ $+6A=A^3$, $A^3-6A-40=0$.

Pero $A^3-6A-40=(A^3-4A^2)+(4A^2-16A)+(10A-$ $-40)=A^2(A-4)+4A(A-4)+10(A-4)=(A-4)\times$ $\times(A^2+4A+10)$.

Como $A^2+4A+10=(A^2+4A+4)+6=(A+2)^2+$ $+6\neq 0$, la igualdad $(A-4)(A^2+4A+10)=0$ sólo se realiza con $A=4$.

Así, pues, $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}=4$.

EJEMPLO 9. Transformemos la expresión

$$f(a)=\sqrt{a^2-4a+4}+\sqrt{a^2+6a+9}$$

a la forma que no contiene los signos de la raíz y del módulo.

SOLUCIÓN. Como $\sqrt{a^2-4a+4}=\sqrt{(a-2)^2}=|a-2|$ y $\sqrt{a^2+6a+9}=\sqrt{(a+3)^2}=|a+3|$, $f(a)=|a-2|+|a+3|$.

Los puntos $a_1=-3$ y $a_2=2$ dividen la recta numérica en los intervalos $]-\infty;\ -3[$, $[-3;\ 2[$ y $[2;\ \infty[$. Analicemos la expresión prefijada en cada uno de estos intervalos.

Con $a<-3$, tenemos: $|a-2|=-a+2$, $|a+3|=-a-$ -3, o sea, $f(a)=-a+2-a-3=-2a-1$.

Con $-3\leqslant a<2$, tenemos: $|a-2|=-a+2$, $|a+3|=$ $=a+3$ y, entonces, $f(a)=-a+2+a+3=5$.

Por fin, con $a\geqslant 2$, tenemos: $|a-2|=a-2$, $|a+3|=$ $=a+3$, es decir, $f(a)=a-2+a+3=2a+1$.

$$\text{Así, pues,}\quad f(a)=\begin{cases}-2a-1, & \text{si}\quad a<-3,\\ 5, & \text{si}\quad -3\leqslant a<2,\\ 2a+1, & \text{si}\quad a\geqslant 2.\end{cases}$$

EJEMPLO 10. Simplifiquemos la expresión

$$f(a,\ b)=\sqrt{\frac{a+b^2}{b}+2\sqrt{a}}-\sqrt{\frac{a+b^2}{b}-2\sqrt{a}},$$

donde $a\geqslant 0$, $b>0$.

SOLUCIÓN. $f(a,\ b)=\sqrt{\dfrac{(\sqrt{a}+b)^2}{b}}-\sqrt{\dfrac{(\sqrt{a}-b)^2}{b}}=$

$$=\frac{|\sqrt{a}+b|-|\sqrt{a}-b|}{\sqrt{b}}.$$

Como $a \geqslant 0$, $b > 0$, $\sqrt{a}+b > 0$ y, por lo tanto, $|\sqrt{a}+b| = \sqrt{a}+b$. Esto significa que

$$f(a, b) = \frac{\sqrt{a}+b-|\sqrt{a}-b|}{\sqrt{b}}.$$

Ahora hemos de analizar dos casos: 1) $\sqrt{a}-b \geqslant 0$, 2) $\sqrt{a}-b < 0$.

En el primer caso, tenemos; $|\sqrt{a}-b| = \sqrt{a}-b$ y, por consiguiente,

$$f(a, b) = \frac{\sqrt{a}+b-\sqrt{a}+b}{\sqrt{b}} = 2\sqrt{b}.$$

En el segundo caso $|\sqrt{a}-b| = -(\sqrt{a}-b)$ y, por lo tanto,

$$f(a, b) = \frac{\sqrt{a}+b+\sqrt{a}-b}{\sqrt{b}} = \frac{2\sqrt{ab}}{b},$$

Así, pues, $f(a, b) = \begin{cases} 2\sqrt{b}, \text{ si } \sqrt{a} \geqslant b, \\ \dfrac{2\sqrt{ab}}{b}, \text{ si } \sqrt{a} < b. \end{cases}$

EJEMPLO 11. Simplifiquemos la expresión

$$f(a, b) = \left(\frac{a\sqrt[3]{a}-2a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a^2b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}} + \frac{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}\right) : \sqrt[3]{a^2}.$$

SOLUCIÓN. Realicemos las transformaciones por operaciones. Precisamente, simplifiquemos consecutivamente las fracciones entre paréntesis. Tenemos,

1) $$\frac{a\sqrt[3]{a}-2a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a^2b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}\,(\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{\sqrt[3]{a}\,(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})} =$$
$$= \frac{\sqrt[3]{a}\,(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{a}\,(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}).$$

A continuación,

2) $$\frac{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{ab}\,(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{ab}.$$

Ahora,

3) $\sqrt[3]{a}\,(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})+\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a^2}$.

Y, por fin,

4) $\sqrt[3]{a^2}:\sqrt[3]{a^2} = 1$.

Así, pues, $f(a, b) = \mathbf{1}$.

EJEMPLO 12. Simplifiquemos la expresión

$$f(a)=\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right):\left(1+\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right).$$

SOLUCIÓN. Liquidemos la irracionalidad en el denominador, primero en la primera y, a continuación, en la segunda fracción. Tenemos,

1) $$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}{(\sqrt{a}+\sqrt{a+1})(\sqrt{a}-\sqrt{a+1})}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}{a-(a+1)}=$$
$$=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}.$$

2) $$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}{(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}{a-(a-1)}=$$
$$=\sqrt{a}+\sqrt{a-1}.$$

Así, pues,

3) $$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}=\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}.$$

A continuación,

4) $$1+\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}=\frac{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}.$$

Y, a continuación,

5) $$(\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}):\frac{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}=\sqrt{a-1}.$$

Así, pues,

$$f(a)=\sqrt{a-1}.$$

EJERCICIOS

Hallen los valores de las expresiones:

120. $2a^2-5ab+2b^2$ con $a=\sqrt{6}+\sqrt{5}$ y $b=\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

121. $3a^2+4ab-3b^2$ con $a=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ y $b=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$.

122. $4a^3+2a^2-8a+7$ con $a=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$.

123. $\dfrac{a+b-1}{a-b+1}$ con $a=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}$ y $b=\dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1}$.

124 $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ con $x=\dfrac{2ab}{1+b^2}$.

125. $2a(1+x^2)^{\frac{1}{2}}(x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}})^{-1}$ con $x=\frac{1}{2}\left((ab^{-1})^{\frac{1}{2}}-(ba^{-1})^{\frac{1}{2}}\right)$.

Simplifiquen las expresiones:

126. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$. 127. $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

128. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$.

129. $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ 130. $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$.

131. $\sqrt[4]{17+\sqrt{288}}$. 132. $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}$.

133. $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$. 134. $\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

Libérense de la irracionalidad en el denominador de la fracción:

135. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}}$. 136. $\frac{1}{\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{7}}$.

137. $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}$. 138. $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

139. $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$. 140. $\frac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{15}+\sqrt{10}}$.

141. $\frac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2}$. 142. $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}}$. 143. $\frac{2+\sqrt{6}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-2}$.

Comprueben las siguientes igualdades:

144. $$\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

145. $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\,(2-\sqrt{3})=1$. 146. $\frac{2\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{20+12\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}}$.

147. $$\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}\cdot(5+2\sqrt{6})\,(49-20\sqrt{6})}{\sqrt{27}-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}=1.$$

148. $$\left(\frac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}+\frac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}\right)^2=8.$$

149. $$\left(\frac{3}{\sqrt[3]{64}-\sqrt[3]{25}}+\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{5}}-\frac{10}{\sqrt[3]{25}}\right)^{-1}(13-4\sqrt[3]{5}-2\sqrt[3]{25})+\sqrt[3]{25}=4.$$

150. $$\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}=3.$$

151. $\sqrt{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$.

Demuestren las identidades, indicando el dominio de su determinación:

152. $$\frac{2a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-3a^{\frac{1}{3}}}-\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}-a^{\frac{2}{3}}}-\frac{a+1}{a^2-4a+3}=0.$$

153. $\sqrt[4]{6a\left(5+2\sqrt{6}\right)}\cdot\sqrt{3\sqrt{2a}-2\sqrt{3a}}=\sqrt{6a}$.

154. $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{8+2\sqrt{15}}+\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{\sqrt{20}+\sqrt{12}}\cdot\sqrt[6]{8-2\sqrt{15}}-2\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{a^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{4}}{2-a}$.

155. $\dfrac{\left(\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^2-\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2\right)^2-(16a+4b)}{4a-b}+\dfrac{10\sqrt{a}-3\sqrt{b}}{2\sqrt{a}+\sqrt{b}}=1$

156. $\sqrt{\left(a^2+\dfrac{4}{a^2}\right)^2-8\left(a+\dfrac{2}{a}\right)^2+48}=\left(a-\dfrac{2}{a}\right)^2$.

Demuestren las identidades:

157. $\dfrac{a^2+2a-3+(a+1)\sqrt{a^2-9}}{a^2-2a-3+(a-1)\sqrt{a^2-9}}=\dfrac{\sqrt{a+3}}{\sqrt{a-3}}$, si $a>3$.

158. $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{\dfrac{a^2-4}{a}}}+\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{\dfrac{a^2-4}{a}}}=\dfrac{\sqrt{2a+4}}{\sqrt[4]{a}}$, si $a\geqslant 2$.

159. $\left(\sqrt[3]{(x^2+1)\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}+\sqrt[3]{(x^2-1)\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}\right)^{-2}=$

$=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}\left(x^2-\sqrt{x^4-1}\right)}{2}$, si $x>1$.

Simplifiquen las expresiones:

160. $\left(\dfrac{1}{2}a^{0,25}+a^{0,75}\right)^2-a^{1,5}\left(1+a^{-0,5}\right)$.

161. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}+\dfrac{1-\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{ab}}{1+\sqrt[4]{a^3b^3}}-\dfrac{1-\sqrt[4]{ab}-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$.

162. $\dfrac{m+n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}:\left(\dfrac{m+n}{\sqrt{mn}}+\dfrac{n}{m-\sqrt{mn}}-\dfrac{m}{\sqrt{mn}+n}\right)$.

163. $\left(\dfrac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\dfrac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\dfrac{1}{a^2}-1}-\dfrac{1}{a}\right)$.

164. $\left(m+\dfrac{m^{1,5}}{m^{0,5}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\dfrac{m^{0,5}-n^{0,5}}{m^{0,5}}+\dfrac{n^{0,5}}{m^{0,5}-n^{0,5}}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

165. $2a\sqrt{1+\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2}:\left(\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)+\right.$

$\left.+\sqrt{1+\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2}\right)$, donde $a>0$, $b>0$.

166. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-4\sqrt{a^{-1}}}-\dfrac{2\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{64a}}\right)^{-2}-\sqrt{a^2+8a+16}$.

167. $\left(\sqrt{\left(\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}}-1\right)^{-1}}+\sqrt{\left(\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}}+1\right)^{-1}}\right):\left(\sqrt{\left(\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}}-1\right)^{-1}}-\right.$

$\left.-\sqrt{\left(\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}}+1\right)^{-1}}\right)$, donde $a>0$, $b>0$.

168. $\left(\sqrt{\frac{(1-a)\sqrt[3]{1+a}}{a}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3a^2}{4-8a+4a^2}}\right)^{-1}-\sqrt[3]{\left(\frac{3a\sqrt{a}}{2\sqrt{1-a^2}}\right)^{-1}}$.

169. $\left(\frac{(1-a)^{\frac{1}{4}}}{2(1+a)^{\frac{3}{4}}}+\frac{(1+a)^{\frac{1}{4}}(1-a)^{-\frac{3}{4}}}{2}\right)(1-a)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^{-\frac{1}{4}}$.

170. $\left(\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}}+\frac{1-\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}}{1+\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}}\right):\frac{\sqrt{a-\frac{1}{a}}}{\sqrt{\frac{1}{a}}}$.

171. $b\left(\left(\frac{a\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a^2b^3}}{\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2b}}-\sqrt[4]{ab}\right):(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})-\sqrt[4]{a}\right)^{-1}$.

172. $\left(\frac{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}-\frac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}\right)(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b})^{-1}+\sqrt[6]{a}$.

173. $\left(\frac{a-2b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{4b^2}}+\frac{\sqrt[3]{2a^2b}+\sqrt[3]{4ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{4b^2}+\sqrt[3]{16ab}}\right):\frac{a\sqrt[3]{a}+b\sqrt[3]{2b}+b\sqrt[3]{a}+a\sqrt[3]{2b}}{a+b}$.

174. $\frac{(a-b)^3(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-3}+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{3(\sqrt{ab}-a)}{a-b}$.

175. $\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{6}}+1}+\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}+1}-\frac{2a^{\frac{1}{3}}-2}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}+1}\right)^{-1}-\frac{1}{4}a^{\frac{4}{3}}$.

176. $\left(\frac{\sqrt[4]{b}(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})+2\sqrt[4]{ab}}{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^2}-\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+1\right)^{-1}+1\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[8]{ab}$.

177. $\left(\frac{(a+b)(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}})^{-1}-(\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2})(b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}})^{-2}}{(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b})(\sqrt[3]{b}+\sqrt[6]{ab}-2\sqrt[3]{a})}\right)^{-1}+2\sqrt[6]{a}$.

178. $(\sqrt{ab}-ab\,(a+\sqrt{ab}^{\,-1}):\frac{2\sqrt{ab}-2b}{a-b}$.

179. $\left(\frac{(a-1)^{-1}}{a^{-2}}-(1-a)^{-1}\right)\cdot\frac{1+a(a-2)}{a^2-a+1}\cdot\sqrt{\frac{1}{(a+1)^2}}$.

180. $\left(\frac{4b^2+2ab}{\sqrt{4a^2b^2-8ab^3}}-\frac{16^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4a^2b-8ab^2}}\right)\left(\frac{1}{2ab}-a^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2a}{b}}$.

181. $\frac{\sqrt[6]{b^5}-\sqrt[6]{a^2b^3}+\sqrt[6]{a^3b^2}-\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[6]{b}+\sqrt[6]{a}}\left(\frac{\sqrt[6]{ab^9}+\sqrt[6]{a^{10}}}{a-\sqrt{ab}+a}\right)^{-1}+1$.

§ 4. Transformaciones idénticas de expresiones exponenciales y logarítmicas

Recordemos los datos fundamentales acerca de los logaritmos necesarios para resolver los problemas de este párrafo.

Sea a un número positivo distinto de 1. El número x recibe el nombre de *logaritmo de N en base a*, si $a^x = N$.

P.ej., $\log_2 16 = 4$, ya que $2^4 = 16$, $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{81} = -8$, ya que $(\sqrt{3})^{-8} = \frac{1}{81}$. En general, $\log_a a^r = r$.

De la definición de logaritmo se desprende que, primero, la anotación $x = \log_a N$ y $a^x = N$ expresan una misma dependencia entre los números a, x, N; segundo, el número N debe ser positivo; tercero, si $a > 0$, $a \neq 1$, $N > 0$, entonces

$$a^{\log_a N} = N \qquad (1)$$

En esencia, la identidad (1) es la anotación matemática de la definición de logaritmo; además, le dan el nombre de *identidad logarítmica fundamental*.

Para todo número positivo N y cualquier número positivo a, distinto de 1, sólo existe un número real x tal que $x = \log_a N$. En particular, de aquí se deduce que si $N_1 = N_2$, $\log_a N_1 = \log_a N_2$, donde $N_1 > 0$, $N_2 > 0$.

Recordemos las propiedades fundamentales de los logaritmos: Si $N_1 \cdot N_2 > 0$, entonces

1ª. $\log_a (N_1 \cdot N_2) = \log_a |N_1| + \log_a |N_2|$.

2ª. $\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a |N_1| - \log_a |N_2|$.

Si, en particular, $N_1 > 0$, $N_2 > 0$, $|N_1| = N_1$, $|N_2| = N_2$ y obtenemos: $\log_a (N_1 \cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$, $\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2$.

3ª. Si $N > 0$, $\mu \in R$, $\log_a N^\mu = \mu \log_a N$; si $N \neq 0$, $\mu = 2m$ ($m = \pm 1, \pm 2; \ldots$), $\log_a N^\mu = \mu \log_a |N|$.

4ª. Si $N > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$, $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$.

Esta identidad suele ser llamada *fórmula de transición a una nueva base*. En particular, con $N = b$, de ella se desprende que $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

5ª. Si $N > 0$, $\mu \in R$, $\log_a N = \log_{a^\mu} N^\mu$.

Examinemos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1. Calculemos $49^{1-\frac{1}{4}\log_7 25}$.

SOLUCIÓN. Haciendo uso de que $49 = 7^2$ y de que al elevar una potencia a una potencia los exponentes se multiplican, obtenemos:

$$7^{2-\frac{1}{2}\log_7 25}.$$

El exponente se puede transformar del modo siguiente:

$$2-\frac{1}{2}\log_7 25 = 2-\log_7 5 = \log_7 49 - \log_7 5 = \log_7 \frac{49}{5}.$$

Así, pues, $7^{2-\frac{1}{2}\log_7 25} = 7^{\log_7 \frac{49}{5}}$. Pero de la identidad (1) se deduce que $7^{\log_7 \frac{49}{5}} = \frac{49}{5}$. De modo que $49^{1-\frac{1}{4}\log_7 25} = 9.8$.

EJEMPLO 2. Calculemos $\log 25$, si $\log 2 = a$.

SOLUCIÓN. Tenemos $\log 25 = 2\log 5$. Expresemos el número 5 con los números 10 y 2 (es decir, con la base dada y el número cuyo logaritmo es conocido), empleando las operaciones de multiplicación, división y elevación a potencia. Como $5 = \frac{10}{2}$, $2\log 5 =$
$= 2\log\frac{10}{2} = 2(\log 10 - \log 2) = 2(1-a)$.

EJEMPLO 3. Calculemos $\log_3 18$ si $\log_3 12 = a$.

SOLUCIÓN. *1-er procedimiento.* Como en el anterior ejemplo simplifiquemos $\log_3 18$:

$$\log_3 18 = \log_3 (3^2\cdot 2) = 2 + \log_3 2.$$

Esto significa que debemos calcular $\log_3 2$, sabiendo que $\log_3 12 =$
$= a$. Expresemos el número 2 con los números 3 y 12 (la base dada y el número, cuyo logaritmo es conocido) haciendo uso de las operaciones de multiplicar, dividir y elevar a potencia.

Tenemos: $2 = \sqrt{\frac{12}{3}}$, entonces

$$\log_3 2 = \log_3 \sqrt{\frac{12}{3}} = \frac{1}{2}(\log_3 12 - \log_3 3) = \frac{1}{2}(a-1).$$

Así, pues, $\log_3 18 = 2 + \frac{a-1}{2} = \frac{a+3}{2}$.

2-do procedimiento. Tenemos: $\log_3 18 = 2 + \log_3 2$. Introducimos la notación $\log_3 2 = x$, entonces $\log_3 18 = 2 + x$.

A continuación, $\log_3 12 = \log_3 (3\cdot 2^2) = 1 + 2\log_3 2 = 1 + 2x$.

De acuerdo con el planteamiento $\log_3 12 = a$, por lo tanto, $1 + 2x = a$, de donde $x = \frac{a-1}{2}$.

De este modo, $\log_3 18 = 2 + x = 2 + \frac{a-1}{2} = \frac{a+3}{2}$.

EJEMPLO 4. Calculemos $\log_{49} 16$ si $\log_{14} 28 = a$.
SOLUCION. Empleando las fórmulas 5^a y 3^a, obtenemos:

$$\log_{49} 16 = \log_{\sqrt{49}} \sqrt{16} = \log_7 4 = 2 \log_7 2.$$

Introducimos la anotación $\log_7 2 = x$, entonces $\log_{49} 16 = 2x$. A continuación, tenemos:

$$\log_{14} 28 = \frac{\log_7 28}{\log_7 14} = \frac{\log_7 (2^2 \cdot 7)}{\log_7 (2 \cdot 7)} = \frac{2 \log_7 2 + \log_7 7}{\log_7 2 + \log_7 7} = \frac{2x+1}{x+1}.$$

Como según el planteamiento $\log_{14} 28 = a$, el problema se reduce a la solución de la ecuación $\frac{2x+1}{x+1} = a$, de donde hallamos $x = \frac{a-1}{2-a}$.

Así, pues, $\log_{49} 16 = 2x = \frac{2(a-1)}{2-a}$.

EJEMPLO 5. Calculemos $\log_{12} 60$ si $\log_6 30 = a$, $\log_{15} 24 = b$.
SOLUCIÓN.

$$\log_{12} 60 = \frac{\log_2 60}{\log_2 12} = \frac{\log_2 (4 \cdot 3 \cdot 5)}{\log_2 (4 \cdot 3)} = \frac{2 + \log_2 3 + \log_2 5}{2 + \log_2 3}.$$

Introducimos la anotación: $\log_2 3 = x$, $\log_2 5 = y$. Entonces, $\log_{12} 60 = \frac{2+x+y}{2+x}$.
A continuación, tenemos:

$$a = \log_6 30 = \frac{\log_2 30}{\log_2 6} = \frac{\log_2 (2 \cdot 3 \cdot 5)}{\log_2 (2 \cdot 3)} = \frac{1+x+y}{1+x}.$$
$$b = \log_{15} 24 = \frac{\log_2 24}{\log_2 15} = \frac{\log_2 (8 \cdot 3)}{\log_2 (3 \cdot 5)} = \frac{3+x}{x+y}.$$

Así, pues, el problema se reduce a resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{1+x+y}{1+x} = a, \\ \frac{x+3}{x+y} = b. \end{cases}$$

Con este sistema hallamos:

$$x = \frac{b+3-ab}{ab-1}, \quad y = \frac{2a-b-2+ab}{ab-1}.$$

Entonces $\log_{12} 60 = \frac{2ab+2a-1}{ab+b+1}$.

EJERCICIOS

Calculen:

182. a) $\log_8 \log_4 \log_2 16$; b) $-\log_2 \log_3 \sqrt{\sqrt[4]{3}}$;
c) $\log \log \sqrt{\sqrt[5]{10}}$.

183. a) $\left(\frac{16}{25}\right)^{\log_{\frac{125}{64}} 3}$; b) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\log_{\frac{81}{16}} 5}$.

184. a) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 3^{\log_9 36}$;
b) $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$.

185. $\log \left(2 - \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} \cdot \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}\right)$.

186. $\log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 + 1$; b) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$.

187. a) $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$; b) $3^{\sqrt{\log_3 2}} - 2^{\sqrt{\log_2 3}}$.

Calculen:

188. $\log 1250$ si $\log 2 = 0{,}3010$.
189. $\log_{100} 40$ si $\log_2 5 = a$.
190. $\log_6 16$ si $\log_{12} 27 = a$.
191. $\log_3 5$ si $\log_6 2 = a$, $\log_6 5 = b$.
192. $\log_{35} 28$ si $\log_{14} 7 = a$, $\log_{14} 5 = b$.
193. $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$ si $\log_a 27 = b$, $a > 0$, $a \neq 1$.
194. $\log_5 3{,}38$ si $\log 2 = a$, $\log 13 = b$.
195. $\log_2 360$ si $\log_3 20 = a$, $\log_3 15 = b$.
196. $\log_{275} 60$ si $\log_{12} 5 = a$, $\log_{12} 11 = b$.
197. $\log_c ab$ si $\log_a n = p$, $\log_b n = q$, $\log_c n = r$, donde a, b, c, n son números positivos distintos de 1.
198. $\log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$ si $\log_{ab} a = n$, donde a, b son números positivos, con la particularidad de que $ab \neq 1$.
199. $\log_{abc} n$ si $\log_a n = 2$, $\log_b n = 3$ $\log_c n = 6$, donde a, b, c son números positivos distintos de 1.

Demuestren las identidades:

200. $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$.

201. a) $\log_{ab} n = \frac{\log_a n \cdot \log_b n}{\log_a n + \log_b n}$; b) $\frac{\log_a n}{\log_{ab} n} = 1 + \log_a b$;
c) $\log_{bn} an = \frac{\log_b a + \log_b n}{1 + \log_b n}$.

202. $\frac{1}{\log_a n} + \frac{1}{\log_{a^2} n} + \frac{1}{\log_{a^3} n} + \frac{1}{\log_{a^4} n} + \frac{1}{\log_{a^5} n} = 15 \log_n a$.

203. $\frac{1}{(\log_{a_1} x)^{-1} + (\log_{a_2} x)^{-1} + \ldots + (\log_{a_n} x)^{-1}} = \log_{a_1 a_2 \ldots a_n} x$.

204. $\log_a n \cdot \log_b n + \log_b n \cdot \log_c n + \log_c n \cdot \log_a n = \dfrac{\log_a n \cdot \log_b n \cdot \log_c n}{\log_{abc} n}$.

205. $\log \dfrac{a+b}{3} = \dfrac{1}{2} (\log a + \log b)$ si $a^2 + b^2 = 7ab$.

206. $\log \dfrac{a+2b}{4} = \dfrac{1}{2} (\log a + \log b)$ si $a^2 + 4b^2 = 12ab$.

Simplifiquen las expresiones:

207. $(\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b) \log_b a - 1$.

208. $\dfrac{1 - \log_a^3 b}{(\log_a b + \log_b a + 1) \log_a \dfrac{a}{b}}$.

209. $\left(b^{\frac{\log_{100} a}{\log a}} \cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\log b}}\right)^{2 \log_{ab}(a+b)}$.

210. $0{,}2\left(2a^{\log_2 b} + 3b^{\log_{\sqrt{2}} \sqrt{a}}\right)$.

211. $\sqrt{1 + 2^{\frac{\log a}{\log \sqrt{2}}} - a^{1 + \frac{1}{\log_4 a^2}}} - 1$.

212. $\sqrt{\log_a b + \log_b a + 2} \cdot \log_{ab} a \cdot \sqrt{\log_a^3 b}$.

213. $\sqrt{\sqrt{\log_b^4 a + \log_a^4 b + 2} + 2} - \log_b a - \log_a b$.

214. $\dfrac{\log_a b - \log_{\frac{\sqrt{a}}{b^3}} \sqrt{b}}{\log_{\frac{a}{b^4}} b - \log_{\frac{a}{b^6}} b} : \log_b (a^3 b^{-12})$.

215. $2 \log_a^{\frac{1}{2}} b \left(\left(\log_a \sqrt[4]{ab} + \log_b \sqrt[4]{ab}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\log_a \sqrt[4]{\dfrac{b}{a}} + \log_b \sqrt[4]{\dfrac{a}{b}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$
si $a > 1$, $b > 1$.

§ 5. Demostración de desigualdades

En el presente párrafo serán tratadas las desigualdades, cuya validez ha de ser establecida en el conjunto prefijado de valores que entran en éste. Si semejante conjunto no se indica, se considera que las variables pueden tomar cualesquiera valores reales.

1. Demostración de desigualdades con ayuda de la definición. Como sabemos, por definición se supone que $a > b$ si $a - b$ es un número positivo. Por esta razón, para demostrar, según este procedimiento, la desigualdad $f(a, b, \ldots, k) > q(a, b, \ldots, k)$ en el conjunto prefijado de valores de las variables $a, b, \ldots, k$ se compone la diferencia $f(a, b, \ldots, k) - q(a, b, \ldots, k)$ y se demuestra que es positiva con valores prefijados de $a, b, \ldots, k$ (de modo análogo este procedimiento se aplica para demostrar las igualdades del tipo $f < q$, $f \geqslant q$, $f \leqslant q$.

EJEMPLO 1. Demostremos que si $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, entonces

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \text{ (desigualdad de Cauchy).} \qquad (1)$$

DEMOSTRACIÓN. Compongamos la diferencia $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$ y calculemos su signo. Tenemos: $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$.

Con todos los valores no negativos de a y b la expresión $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$ no es negativa. Ella se anula si, y sólo si $a=b$. Así, pues, la diferencia $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$ no es negativa y esto significa, precisamente, que $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. El signo de igualdad sólo tiene lugar con $a=b$.

EJEMPLO 2. Demostremos que si $ab > 0$,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2. \qquad (2)$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 2 = \frac{a^2+b^2-2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab}.$$

Como $ab > 0$, $\frac{(a-b)^2}{ab} \geqslant 0$, con la particularidad de que el signo de igualdad sólo tiene lugar con $a=b$. Así, pues, la diferencia $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 2$ no es negativa, o sea, la desigualdad (2) queda demostrada.

EJEMPLO 3. Demostremos que

$$a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 14 > 2a + 12b + 6c. \qquad (3)$$

DEMOSTRACIÓN. Analicemos la diferencia

$$(a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 14) - (2a + 12b + 6c).$$

Después de reagrupar los términos de esta diferencia, obtenemos:

$$(a^2 - 2a + 1) + (4b^2 - 12b + 9) + (3c^2 - 6c + 3) + 1 =$$
$$= (a-1)^2 + (2b-3)^2 + 3(c-1)^2 + 1.$$

La última expresión es positiva con cualesquiera valores de a, b, c. La desigualdad (3) queda demostrada.

EJEMPLO 4. Demostremos que si $a + b + c \geqslant 0$.

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc. \qquad (4)$$

DEMOSTRACION. Consideremos la diferencia $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, en la que la suma $a^3 + b^3$ se completa hasta el cubo de la suma. Obtenemos:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 - 3a^2b - \\ - 3ab^2 - 3abc = (a + b)^3 - 3ab(a + b + c) + c^3.$$

Después de descomponer la suma de cubos $(a + b)^3 + c^3$ en factores, obtenemos:

$$(a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c) = ((a+b)+c)((a+b)^2 - \\ -(a+b)c + c^2) - 3ab(a+b+c) = (a+b+c)(a^2+2ab+ \\ +b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab) = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2- \\ -ab-bc-ac) = \frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac) = \\ = \frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2).$$

Como, de acuerdo con el planteamiento, $a + b + c \geqslant 0$, la expresión obtenida no es negativa. De aquí se desprende la validez de la desigualdad (4). Señalemos que el signo de igualdad en la desigualdad (4) tiene lugar cuando $a + b + c = 0$, así como al ser $a = b = c$.

2. Método sintético de demostración de desigualdades. La esencia de este método consiste en que con una serie de transformaciones, la desigualdad a demostrar se deduce de ciertas desigualdades conocidas (de referencia). Como estas últimas se pueden utilizar, p.ej., las siguientes desigualdades: a) $a^2 \geqslant 0$; b) $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, donde $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$; c) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 0$, donde $ab > 0$; d) $ax^2 + bx + c > 0$, donde $a > 0$ y $b^2 - 4ac < 0$.

EJEMPLO 5. Demostremos que si $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $d \geqslant 0$, entonces

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}. \qquad (5)$$

DEMOSTRACION. Tomemos como desigualdad de referencia la de Cauchy:

$$\frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}}.$$

Como, a su vez, $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ y $\frac{c+d}{2} \geqslant \sqrt{cd}$,

$$\sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}} \geqslant \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}.$$

Esto significa, $\dfrac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$.

Pero, $\dfrac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} = \dfrac{a+b+c+d}{4}$.

Así, pues, $\dfrac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$.

Al analizar la demostración llegamos a la conclusión de que el signo de igualdad en la desigualdad (5) sólo puede tener lugar si, y sólo si $a=b$, $c=d$ y $\frac{a+b}{2}=\frac{c+d}{2}$, es decir, cuando $a=b=c=d$.

EJEMPLO 6. Demostremos que $\left(\frac{a+1}{2}\right)^n > n!$, donde $n \in N$, $n > 1$.

DEMOSTRACIÓN Como de referencia tomemos las siguientes desigualdades de Cauchy:

$$\frac{n+1}{2} \geqslant \sqrt{n\cdot 1};\ \frac{(n-1)+2}{2} \geqslant \sqrt{(n-1)\cdot 2};\ \frac{(n-2)+3}{2} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{(n-2)\cdot 2};\ \ldots;\ \frac{2+(n-1)}{2} \geqslant \sqrt{2\cdot(n-1)};\ \frac{1+n}{2} \geqslant \sqrt{1\cdot n}.$$

Multiplicando estas n desigualdades, obtenemos:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geqslant \sqrt{(n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1)(1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)\,n)} =$$
$$= \sqrt{n!n!} = \sqrt{(n!)^2} = n!$$

$$\text{Así, pues, } \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geqslant n! \tag{6}$$

Como, de acuerdo con el planteamiento, $n \neq 1$ la primera de las desigualdades de Cauchy sólo puede ser estricta. Pero, entonces, incluso despues de la multiplicación de las desigualdades de referencia, la desigualdad (6) obtenida debe ser también estricta. De forma que $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n$, que es lo que deseábamos demostrar.

EJEMPLO 7 Demostremos que si $a>0$, $b>0$, $c>0$, entonces

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9. \tag{7}$$

DEMOSTRACIÓN Como de referencia tomemos las siguientes desigualdades:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2;\ \frac{a}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 2;\ \frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geqslant 2$$

(estas desigualdades se convierten en igualdades en aquellos casos cuando $a=b$, $a=c$ y $b=c$, respectivamente). Sumándolas, obtenemos $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geqslant 6$ ó bien $\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}\geqslant 6$.

A continuación, realicemos una serie de sencillas transformaciones:

$$\left(1+\frac{a+c}{b}\right)+\left(1+\frac{b+c}{a}\right)+\left(1+\frac{a+b}{c}\right)\geqslant 9,$$
$$\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{c}\geqslant 9.$$

Sacando $a+b+c$ de entre paréntesis, obtenemos:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9.$$

El signo de igualdad sólo tiene lugar cuando $a=b=c$.

EJEMPLO 8. Demostremos que si $n\in N$, $n>1$, entonces

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1. \qquad (8)$$

DEMOSTRACION. Tenemos:

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{2\cdot 2}<\frac{1}{1\cdot 2};\ \frac{1}{9}=\frac{1}{3\cdot 3}<\frac{1}{2\cdot 3};\ \frac{1}{16}=\frac{1}{4\cdot 4}<\frac{1}{3\cdot 4};\ \ldots$$
$$\ldots;\ \frac{1}{n^2}=\frac{1}{n\cdot n}<\frac{1}{(n-1)\,n}.$$

Sumemos estas $(n-1)$ desigualdades y obtenemos:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\,n}=$$
$$=\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\frac{4-3}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{n-(n-1)}{(n-1)\,n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}<1.$$

Así, pues, $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1$.

3. Método de demostración de desigualdades a la inversa.

EJEMPLO 9. Demostremos que si $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$; $c\geqslant 0$, $d\geqslant 0$, entonces

$$\sqrt{(a+c)(b+d)}\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{cd}. \qquad (9)$$

DEMOSTRACION. Supongamos que con ciertos valores de a, b, c, d la desigualdad (9) no es cierta, o sea, se cumple la desigualdad $\sqrt{(a+c)(b+d)}<\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$.

Como los dos miembros de esta desigualdad no son negativos, al elevarlos al cuadrado, obtenemos:

$$(a+c)(b+d) < ab+cd+2\sqrt{abcd},$$

de donde $bc+ad < 2\sqrt{abcd}$, y, a continuación, $\frac{bc+ad}{2} < \sqrt{(bc)\cdot(ad)}$.

Pero esto contradice la desigualdad de Cauchy. Esto significa que nuestra suposición no es cierta y, por lo tanto, es válida la desigualdad (9).

EJEMPLO 10 Demostremos que si $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, entonces

$$\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}. \qquad (10)$$

DEMOSTRACIÓN Supongamos que con ciertos valores de a, b, c la desigualdad (10) no es cierta, es decir, se cumple la desigualdad

$$\frac{a+b+c}{3} > \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Al elevar al cuadrado sus dos miembros, obtenemos:

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 > \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

y, a continuación, $(a+b+c)^2 > 3(a^2+b^2+c^2)$, $3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2 < 0$, $3(a^2+b^2+c^2) - (a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc) < 0$, $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc < 0$, $(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2 < 0$

La última desigualdad no es cierta, ya que la suma de cuadrados no puede ser un número negativo. De forma que nuestra suposición tampoco es cierta, por lo que será válida la desigualdad (10).

OBSERVACIÓN. Sean dados n números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Introduzcamos en la consideración las siguientes variables:

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \text{ — media armónica,}$$

$$G_n = \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n} \text{ — media proporcional,}$$

$$A_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \text{ — media aritmética,}$$

$$Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \text{ — media cuadrática de los números } a_1, a_2, \ldots, a_n.$$

Entre estas variables existe la siguiente dependencia:

$$H_n \leqslant G_n \leqslant A_n \leqslant Q_n. \qquad (*)$$

Algunos de los casos particulares de esta dependencia ya han sido demostrados. Así, en los ejemplos 1 y 5 (pág. 34 y 35) fueron demostradas las desigualdades $G_2 \leqslant A_2$ y $G_4 \leqslant A_4$; de la desigualdad demostrada en el ejemplo 7 (pág. 36) se desprende la dependencia $H_3 \leqslant A_3$; por fin, en el ejemplo 10 (pág. 38) fue demostrada la desigualdad $A_3 \leqslant Q_3$.

4. Demostración de desigualdades según el método de inducción matemática.

EJEMPLO 11. Demostremos que si $n \in N$, $n \geqslant 3$,

$$2^n > 2n + 1. \tag{11}$$

DEMOSTRACIÓN. Con $n = 3$ la desigualdad (11) es cierta: $2^3 > 2\cdot 3 + 1$. Supongamos que (11) se realiza con $n = k$ $(k > 3)$, es decir, supongamos que $2^k > 2k + 1$ y demostremos que, en tal caso, la desigualdad (11) se cumple, asimismo, con $n = k + 1$, o sea, demostremos que $2^{k+1} > 2k + 3$.

En efecto, tenemos: $2^{k+1} = 2\cdot 2^k > 2(2k + 1) = 4k + 2 = (2k + 3) + (2k - 1)$. Así, pues, $2^{k+1} > (2k + 3) + (2k - 1)$.

Pero $2k - 1 > 0$ con cualquier valor natural de k. Por consiguiente, con mayor razón $2^{k+1} > 2k + 3$.

De acuerdo con el principio de inducción matemática, podemos llegar a la conclusión de que la desigualdad (11) es válida con toda $n \geqslant 3$.

EJEMPLO 12. Demostremos que si $n \in N$, entonces

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} > \frac{n}{2}. \tag{12}$$

DEMOSTRACIÓN. La expresión que entra en el primer miembro de la desigualdad (12), es la suma de fracciones, cuyos denominadores son números naturales desde 1 hasta $2^n - 1$. Con $n = 1$ se reduce a la desigualdad numérica cierta $1 > \frac{1}{2}$.

Supongamos que la desigualdad (12) se realiza con $n = k$, es decir,

$$S_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^k - 1} > \frac{k}{2}.$$

Demostremos que, en tal caso, la desigualdad (12) es también válida con $n = k + 1$, o sea,

$$S_{k+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1} - 1} > \frac{k+1}{2}.$$

En efecto, $S_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^k - 1}\right) + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \ldots\right.$
$\left.\ldots + \frac{1}{2^{k+1} - 1}\right) = S_k + P_k$, donde $P_k = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1} - 1}$.

La expresión P_h es la suma de 2^h fracciones, cada una de las cuales es mayor que $\frac{1}{2^{h+1}}$. Así, pues,

$$P_h = \frac{1}{2^h} + \frac{1}{2^h+1} + \ldots + \frac{1}{2^{h+1}-1} > \frac{1}{2^{h+1}} + \frac{1}{2^{h+1}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{2^{h+1}} = 2^h \cdot \frac{1}{2^{h+1}} = \frac{1}{2}.$$

De forma que $S_h > \frac{k}{2}$, $P_h > \frac{1}{2}$. Pero, entonces

$$S_{h+1} = S_h + P_h > \frac{k}{2} + \frac{1}{2} = \frac{k+1}{2}, \text{ o sea, } S_{h+1} > \frac{k+1}{2}.$$

De acuerdo con el principio de la inducción matemática llegamos a la conclusión de que la desigualdad (12) es válida para toda $n \in N$.

EJERCICIOS

Demuestren las siguientes desigualdades:

216. $\frac{a^2}{1+a^4} \leqslant \frac{1}{2}$.
217. Si $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $\sqrt{a^5+b^5} \geqslant a^4b + ab^4$.
218. Si $a > 0$, $b > 0$, $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
219. Si $a+b \geqslant 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
220. Si $a+b \geqslant 0$, $ab(a+b) \leqslant a^3+b^3$.
221. $a^2+2b^2+2ab+b+10 > 0$.
222. $1+2a^4 \geqslant a^2+2a^3$.
223. Si $a \neq 2$, $\frac{1}{a^2-4a+4} > \frac{2}{a^3-8}$.
224. Si $a \geqslant -1$, $a^3+1 \geqslant a^2+a$.
225. $a^2+b^2+c^2+3 \geqslant 2(a+b+c)$.
226. Si $a+b \geqslant 0$, $\frac{a^3+b^3}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$.
227. $a^2+b^2 \geqslant ab$ 228. $a^4+b^4 \geqslant a^3b+ab^3$.
229. $(a+b)^4 \geqslant a^4+b^4$, donde $ab \geqslant 0$.
230. Si $a < b < c$, $a^2b+b^2c+c^2a < a^2c+b^2a+c^2b$.
231. $a^8-a^5+a^2-a+1=0$.
232. Si $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $a+b+c \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$.
233. Si m, n, k son números naturales, $mn+mk+nk \leqslant 3mnk$.
234. Si $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc$.
235. Si $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $a+b+c=1$, $(1-a)(1-b)(1-c) \geqslant 8abc$.
236. Si $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $(a+1)(b+1)(c+a)(b+c) \geqslant 16abc$.
237. Si $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $d \geqslant 0$, $a^4+b^4+c^4+d^4 \geqslant 4abcd$.

238. $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0,\ d \geqslant 0,\ \sqrt{(a+b)(c+d)} \leqslant \frac{1}{2}(a+c)+\frac{1}{2}(b+d)$.

239. Si $a_1 \geqslant 0,\ a_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ a_n \geqslant 0,\ \sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+$
$+\ldots+\sqrt{a_1a_n}+\sqrt{a_2a_3}+\ldots+\sqrt{a_2a_n}+\ldots+\sqrt{a_{n-1}a_n} \leqslant$
$\leqslant \frac{n-1}{2}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$.

240. $\log_2 3+\log_3 2 > 2$.

241. $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geqslant 2$. 242. $\frac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}} \geqslant 2$.

243. Si $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ \frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \geqslant a+b+c$.

244. Si $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0,\ ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c) \geqslant 6abc$.

245. Si $a > 0,\ b > 0,\ \frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$.

246. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números positivos, con la particularidad de que $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1,\ (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n$.

247. Si $n=2, 3, 4, \ldots,\ \sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n} > n$.

248. Si $n=2, 3, 4, \ldots,\ n! \geqslant n^{\frac{n}{2}}$.

249. Si $n=2, 3, 4, \ldots,\ \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$.

250. Si $a > 0,\ b > 0,\ \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab}$.

251. Si $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

252. Si $a > 0,\ b > 0,\ \sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a+b}$.

253. Si $a > 0,\ b > 0,\ \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \leqslant \sqrt[4]{ab}$.

254. $\sqrt{a^2+b^2} > \sqrt[3]{a^3+b^3}$.

255. $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc$.

256. Si $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ (\sqrt{a}+\sqrt{b})^8 \geqslant 16ab(a+b)^2$.

257. Si $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0,\ \frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$.

258. Si $abc \neq 0,\ ab+ac+bc \neq 0,\ \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leqslant \sqrt[3]{abc}$.

259. $\frac{a+b+c+d}{4} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}$.

260. Si $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0,\ \frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \leqslant \sqrt[4]{abcd}$.

261*. Si $x > -1,\ n \geqslant 2,\ (1+x)^n > 1+nx$.

* En los ejercicios 261—268 se supone que $n \in N$.

262. Si $n \geqslant 5$, $2^n > n^2$.
263. Si $n \geqslant 10$, $2^n > n^3$.
264. $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$.
265. Si $n \geqslant 2$, $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.
266. Si $n \geqslant 2$, $2\sqrt{n} > 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.
267. Si $n \geqslant 2$, $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.
268. Si $n \geqslant 2$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} < n$.

§ 6. Comparación de los valores de las expresiones numéricas

Si son dados dos números reales, en la mayoría de los casos cuál de ellos es mayor se ve de inmediato, p.ej., $8 > 3$, $\sqrt{6} > \sqrt{5}$. Es fácil establecer que $\sqrt[5]{5} < \sqrt[7]{1000}$. En efecto, $\sqrt[5]{5} < 2$, mientras que $\sqrt[7]{1000} > 2$, o sea, $\sqrt[5]{5} < \sqrt[7]{1000}$.

Sea ahora $a = \sqrt[3]{3}$, $b = \sqrt{2}$. Los dos números pertenecen al intervalo $]1; 2[$, pero cuál de ellos es mayor no está claro hasta el momento. Para establecer el signo de desigualdad entre ellos, realicemos los siguientes razonamientos. Supongamos que $a > b$, o sea, que $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$. Elevando los dos miembros de la última desigualdad al sexto grado, obtenemos $(\sqrt[3]{3})^6 > (\sqrt{2})^6$, es decir, $9 > 8$.

Así, pues, $a > b \Leftrightarrow (\sqrt[3]{3})^6 > (\sqrt{2})^6 \Leftrightarrow 9 > 8$.

Como $9 > 8$ es una desigualdad cierta, también lo será la desigualdad equivalente a ella $a > b$.

Si hubiésemos supuesto que $a < b$, habríamos obtenido: $a < b \Leftrightarrow (\sqrt[3]{3})^6 < (\sqrt{2})^6 \Leftrightarrow 9 < 8$. Como $9 < 8$ es una desigualdad no cierta, lo mismo lo es $a < b$ y, ya que $a \neq b$, nos queda una sola posibilidad: $a > b$.

EJEMPLO 1. Comparemos los números a y b si 1) $a = \sqrt{26} + \sqrt{6}$, $b = \sqrt{13} + \sqrt{17}$; 2) $a = \log_{\frac{1}{2}} 3$, $b = \log_3 1{,}1$; 3) $a = \log_2 3$, $b = \log_3 2$; 4) $a = \sqrt{5} + \sqrt{30} + \sqrt{50}$, $b = \sqrt{10} + \sqrt{20} + \sqrt{60}$.

SOLUCIÓN. 1) Supongamos que $a > b$. Entonces, haciendo uso de las desigualdades numéricas, obtenemos sucesivamente:

$$(\sqrt{26} + \sqrt{6})^2 > (\sqrt{13} + \sqrt{17})^2,\ 32 + 2\sqrt{156} > 30 + 2\sqrt{221},$$
$$1 + \sqrt{156} > \sqrt{221},\ (1 + \sqrt{156})^2 > 221,\ \sqrt{156} > 32.$$

Así, pues, $a > b \Leftrightarrow \sqrt{156} > 32$. Pero $\sqrt{156} < 32$, o sea, los números iniciales están, asimismo, ligados con el mismo signo de desigualdad, es decir, $a < b$.

2) Tenemos: $a = \log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$, $b = \log_3 1{,}1 > \log_3 1 = 0$. Es decir, $a < 0$, $b > 0$, así, pues, $a < b$.

3) Tenemos: $a = \log_2 3 > \log_2 2 = 1$, $b = \log_3 2 < \log_3 3 = 1$. De modo que $a > 1$, $b < 1$, lo que significa que $a > b$.

4) Primero estimemos cada uno de los sumandos de la suma a con una precisión hasta 1. Tenemos: $2 < \sqrt{5} < 3$, $5 < \sqrt{30} < 6$, $7 < \sqrt{50} < 8$, es decir, $14 < \sqrt{5} + \sqrt{30} + \sqrt{50} < 17$. Así, pues, $14 < a < 17$.

Estimemos ahora cada uno de los términos de la suma b también con una precisión hasta 1. Tenemos: $3 < \sqrt{10} < 4$, $4 < \sqrt{20} < 5$, $7 < \sqrt{60} < 8$, o sea, $14 < \sqrt{10} + \sqrt{20} + \sqrt{60} < 17$. De forma que $14 < b < 17$.

Vemos que las estimaciones obtenidas no permiten comparar los números a y b. Por esta razón, aumentemos la precisión de las estimaciones. O sea, estimemos a y b con una precisión hasta 0,1. Tenemos

$$\begin{array}{r} 2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3 \\ +\,5{,}4 < \sqrt{30} < 5{,}5 \\ 7 < \sqrt{50} < 7{,}1 \\ \hline 14{,}6 < a < 14{,}9 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{r} 3{,}1 < \sqrt{10} < 3{,}2 \\ +\,4{,}4 < \sqrt{20} < 4{,}5 \\ 7{,}7 < \sqrt{60} < 7{,}8 \\ \hline 15{,}2 < b < 15{,}5 \end{array}$$

Así, pues, $a \in]14{,}6;\ 14{,}9[$, en tanto que $b \in]15{,}2;\ 15{,}5[$, lo que quiere decir que $a < b$.

EJEMPLO 2. Dispongamos en orden de crecimiento los números

$$a = \log_2 3, \quad b = \log_6 9, \quad c = \log_5 17.$$

SOLUCIÓN. Comparemos los números a y b. Esto es posible de realizar con dos procedimientos.

1-er procedimiento. Tenemos $\log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4$, o sea, $1 < a < 2$; $\log_6 6 < \log_6 9 < \log_6 36$, es decir, $1 < b < 2$.

Los números a y b pertenecen al intervalo $]1;\ 2[$. Comparemos cada uno de ellos con el punto medio del intervalo, o sea, con el número $\frac{3}{2}$.

Supongamos que $\log_2 3 > \frac{3}{2}$ entonces tendremos sucesivamente: $3 > 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 3^2 > 2^3 \Leftrightarrow 9 > 8$.

Pero, como $a > \frac{3}{2} \Leftrightarrow 9 > 8$, $a > \frac{3}{2}$ es una desigualdad cierta.

Supongamos que $b>\frac{3}{2}$, entonces

$$\log_6 9>\frac{3}{2}\Leftrightarrow 9>6^{\frac{3}{2}}\Leftrightarrow 9^2>6^3\Leftrightarrow 81>216.$$

La última desigualdad es incierta, pero, ya que $b>\frac{3}{2}\Leftrightarrow 81>$ >216, $b>\frac{3}{2}$ es asimismo incierta. De modo que, $b<\frac{3}{2}$.

Así, pues, $a>\frac{3}{2}$, $b<\frac{3}{2}$, lo que significa que $a>b$.

2-do procedimiento. Examinemos la diferencia $a-b$. Tenemos:

$$a-b=\log_2 3-\log_6 9=\log_2 3-\frac{\log_2 9}{\log_2 6}=$$

$$=\frac{\log_2 3\cdot\log_2 6-2\log_2 3}{\log_2 6}=\frac{\log_2 3\,(\log_2 6-2)}{\log_2 6}>0.$$

Es decir, $a>b$.

Comparemos los números a y c. Más arriba hemos establecido que $\frac{3}{2}<a<2$. El número c también yace en estos límites. En efecto, $\log_5 17<\log_5 25=2$. Por otro lado,

$$\frac{3}{2}=\log_5 5^{\frac{3}{2}}=\log_5\sqrt{125}<\log_5 17.$$

Comparemos los números a y c en el punto medio del intervalo $\left]\frac{3}{2};\,2\right[$, es decir, con el número $\frac{7}{4}$.

Supongamos que $a>\frac{7}{4}$. Entonces, empleando las propiedades de las desigualdades, obtenemos sucesivamente

$$\log_2 3>\frac{7}{4}\Leftrightarrow 3>2^{\frac{7}{4}}\Leftrightarrow 3^4>2^7\Leftrightarrow 81>128.$$

Pero, en realidad, $81<128$, lo que significa que $a<\frac{7}{4}$.

Supongamos que $c>\frac{7}{4}$. Entonces

$$\log_5 17>\frac{7}{4}\Leftrightarrow 17>5^{\frac{7}{4}}\Leftrightarrow 17^4>5^7.$$

La última desigualdad es cierta, lo que quiere decir que nuestra suposición también lo es: $c>\frac{7}{4}$.

Así, pues, $a < \frac{7}{4}$, $c > \frac{7}{4}$ y, por lo tanto, $a < c$. De modo que $b < a < c$.

EJERCICIOS

Comparen los números a y b:

269. $a = \sqrt[5]{5}$ $b = \sqrt[6]{6}$; 270. $a = \sqrt{47}$, $b = \sqrt{26} + \sqrt{6}$.

271. $a = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = 2(\sqrt{2} - 1)$. 272. $a = 6$, $b = \frac{3\sqrt{7} + 5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

273. $a = \sqrt[4]{9 - \sqrt{15}}$, $b = \sqrt{\frac{\sqrt{30} - \sqrt{2}}{2}}$.

274. $a = \sqrt[4]{79 + \sqrt[3]{26}}$, $b = \sqrt[4]{84 - \sqrt[3]{28}}$.

275. $a = \sqrt{3} + \sqrt{23} + \sqrt{53}$, $b = \sqrt{13} + \sqrt{33} + \sqrt{43}$.

276. a) $a = \log_4 2$, $b = \log_{0,0625} 0,25$;

b) $a = \log_4 5$, $b = \log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{25}$.

277. a) $a = \log_4 26$, $b = \log_6 17$;

b) $a = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3}$, $b = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2}$.

278. a) $a = \log_2 3$, $b = \log_5 8$;

b) $a = \log_3 16$, $b = \log_{16} 729$.

279. $a = \log_5 14$, $b = \log_7 18$.

280. $a = \log_{20} 80$, $b = \log_{80} 640$.

281. $a = \frac{\log 5 + \log \sqrt{7}}{2}$, $b = \log \frac{5 + \sqrt{7}}{2}$.

282. $a = 3(\log 7 - \log 5)$, $b = 2\left(\frac{1}{2}\log 9 - \frac{1}{3}\log 8\right)$.

283. $a = \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_{4,5} \pi}$, $b = 2$.

284. Dispongan en orden de crecimiento los números a, b, c, d si $a = \log_5 7$, $b = \log_8 3$, $c = \sqrt{2}$, $d = \log_{\frac{1}{4}} 5$.

Capítulo II

SOLUCIÓN DE ECUACIONES Y DESIGUALDADES

§ 7. Equivalencia de ecuaciones

Dos ecuaciones reciben el nombre de *equivalentes* cuando los conjuntos de sus raíces coinciden, en particular, si ambas ecuaciones no tienen raíces.

P.ej., las ecuaciones $\log x = 0$ y $\sqrt{x} = 1$ son equivalentes (cada una de ellas tiene una sola raíz $x = 1$); son equivalentes las ecuaciones $2^{x(x-1)} = 1$ y $\sqrt{x} = x$ (cada una de ellas tiene dos raíces; 0 y 1).

Si cada una de las raíces de la ecuación $f(x) = g(x)$ es simultáneamente raíz de la ecuación $f_1(x) = g_1(x)$, obtenida mediante ciertas transformaciones de la primera, la ecuación $f_1(x) = g_1(x)$ lleva el nombre de *corolario* de la ecuación $f(x) = g(x)$.

Así, pues, la ecuación $(x - 1)(x - 2) = 0$ es el corolario de la ecuación $x - 1 = 0$ (pero ésta no es corolario de la ecuación $(x - 1)(x - 2) = 0$).

Si cada una de dos ecuaciones es corolario de otra de ellas, semejantes ecuaciones son equivalentes.

Varías ecuaciones con una variable reciben el nombre de *conjunto* de ecuaciones si se plantea el problema de hallar todos aquellos valores de la variable, cada uno de los cuales satisface, por lo menos, una de las ecuaciones prefijadas. Las ecuaciones que forman un conjunto se escriben en una columna con ayuda de corchetes, p.ej.,

$$\left[\begin{array}{l} 2x+1=3x+5 \\ 4x-3=x^2 \end{array}\right.$$

(por cierto, que con mayor frecuencia, las ecuaciones que forman un conjunto se escriben en línea: $2x + 1 = 3x + 5$; $4x - 3 = x^2$, dividiéndolas con el signo « ; »).

La solución de un conjunto de ecuaciones consiste en la unión de los conjuntos de raíces de las ecuaciones que constituyen el conjunto dado.

Si al realizar una serie de transformaciones la ecuación $f(x) = g(x)$ se redujo a la ecuación $f_1(x) = g_1(x)$ (o bien a un conjunto de ecuaciones), ciertas raíces de la cual (o del cual) no son raíces de

$f(x) = g(x)$, dichas raíces de la ecuación $f_1(x) = g_1(x)$ reciben el nombre de raíces *extrañas* de la ecuación $f(x) = g(x)$

P.ej., al elevar al cuadrado ambos miembros de $\sqrt{x} = -x$, obtenemos la ecuación $x = x^2$ que tiene dos raíces: 0 y 1. El valor $x = 0$ satisface la ecuación $\sqrt{x} = -x$, mientras que $x = 1$ no la satisface, es decir, para dicha ecuación es una raíz extraña.

La ecuación $(x - 1)^2 = x - 1$ tiene dos raíces: 1 y 2.

Si ambos miembros de esa ecuación se dividen por $x - 1$, obtenemos la ecuación $x - 1 = 1$ que sólo tiene una raíz: $x = 2$. En semejantes casos, suele decirse que durante la transformación de la ecuación inicial tuvo lugar la *pérdida de raíces* (en nuestro ejemplo $x = 1$ es «la raíz perdida»).

Por regla, al resolver ecuaciones se realizan diversas transformaciones, como resultado de las cuales la ecuación dada se reduce a otra más sencilla (o a un conjunto de ecuaciones). Por esta razón, es de importancia conocer cuáles de las transformaciones reducen la ecuación dada a la equivalente, cuáles, a la ecuación corolario y cuáles, a la pérdida de raíces.

TEOREMA 1. *Si a ambos miembros de la ecuación $f(x) = g(x)$ se adiciona una misma expresión $\varphi(x)$, definida con toda x del campo de definición de la ecuación $f(x) = g(x)$, se obtiene la ecuación $f(x) + \varphi(x) = g(x) + \varphi(x)$ equivalente a la dada.*

P.ej., la ecuación $3x^2 + 2x - 5 = 7x - 1$ es equivalente a la ecuación $3x^2 + 2x - 5 + (-7x + 1) = 7x - 1 + (-7x + 1)$, ya que la expresión $\varphi(x) = -7x + 1$, con todos los valores de x, ha sido definida en el campo de definición de la ecuación $3x^2 + 2x - 5 = 7x - 1$.

Pero la ecuación $x^2 = 1$ no es equivalente a $x^2 + \sqrt{x} = 1 + \sqrt{x}$. La violación de la equivalencia se produjo debido a que la expresión $\varphi(x) = \sqrt{x}$ fue definida no con toda x del campo de definición de la ecuación $x^2 = 1$, sino que sólo con los valores $x \geqslant 0$. La adición de la expresión $\varphi(x) = \sqrt{x}$ a ambos miembros de la ecuación $x^2 = 1$ ha conducido a estrechar el campo de definición de la ecuación, lo que pudo acarrear la pérdida de raíces. En el caso dado, $x = -1$ es la raíz de la ecuación $x^2 = 1$, pero no es raíz de $x^2 + \sqrt{x} = 1 + \sqrt{x}$.

Hay que comprender con claridad que en el teorema 1 sólo se trata de una transformación: la adición a ambos miembros de la ecuación de una misma expresión. En lo que atañe a la posterior reducción de términos semejantes (si ella es posible), ésta es una nueva transformación de la ecuación. La reducción de términos semejantes puede conducir a una ecuación que no es equivalente a la inicial. P.ej., si a ambos miembros de $x^2 + 2x + \log x = \log x - 1$ añadimos $\varphi(x) = -\log x$, obtendremos la ecuación $x^2 + 2x + \log x - \log x = \log x - 1 - \log x$, equivalente a la inicial, ya que la

expresión $\varphi(x) = -\log x$ está definida con toda x del campo de definición de la ecuación inicial. Pero, si en la última ecuación realizamos la reducción de términos semejantes, obtenemos la ecuación $x^2 + 2x = -1$ que no es equivalente a la inicial. La eliminación en los dos miembros de la ecuación inicial de la expresión $\log x$ nos llevó a **la ampliación del campo de definición** de la ecuación y, como resultado, pudieron aparecer raíces extrañas. Esto es lo que ha ocurrido en nuestro caso: el valor $x = -1$ es la raíz de la ecuación $x^2 + 2x = -1$, pero no lo es de $x^2 + 2x + \log x = \log x - 1$.

COROLARIO. Las ecuaciones $f(x)+\varphi(x) = g(x)$ y $f(x) = g(x) - \varphi(x)$ son *equivalentes*.

TEOREMA 2 *Si ambos miembros de la ecuación $f(x) = g(x)$ se multiplican o dividen por la misma expresión $\varphi(x)$, definida con todos los valores de x del campo de definición de la ecuación dada y en dicho campo de definición no se reduce a cero en ningún lugar, se obtiene la ecuación*

$$f(x)\cdot\varphi(x) = g(x)\cdot\varphi(x) \quad \left(\text{o bien } \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{g(x)}{\varphi(x)}\right)$$

equivalente a la inicial.

Así, p.ej., si ambos miembros de la ecuación $x - 4 = x(\sqrt{x} + 2)$ se dividen por $\varphi(x) = \sqrt{x} + 2$, obtenemos la ecuación $\sqrt{x} - 2 = x$ equivalente a la dada, ya que la expresión $\varphi(x) = \sqrt{x} + 2$ ha sido definida por doquier en el campo de definición de la ecuación dada ($x \geqslant 0$) y en ningún lugar de dicho campo no se reduce a cero.

Si ambos miembros de la ecuación $x - 2 = 0$ se multiplican por $\varphi(x) = x + 3$, obtenemos la ecuación $(x - 2)(x + 3) = 0$, no equivalente a la dada, ya que con $x = -3$, perteneciente al campo de definición de la ecuación inicial, la expresión $\varphi(x) = x + 3$ se anula, aunque ella ha sido definida con todas las x del campo de definición de la ecuación $x - 2 = 0$. Como es fácil ver, en el caso dado la multiplicación de ambas partes de la ecuación por la expresión $\varphi(x) = x + 3$ ha conducido a la aparición de la raíz extraña $x = -3$.

De modo análogo, si los dos miembros de la ecuación $x - 4 = x(\sqrt{x} - 2)$ se dividen por la expresión $\varphi(x) = \sqrt{x} - 2$, obtenemos la ecuación $\sqrt{x} + 2 = x$ no equivalente a la dada, ya que con $x = 4$ la expresión $\varphi(x) = \sqrt{x} - 2$ se anula, a pesar de haber sido definida con todas las x del campo de definición de la ecuación inicial.

Llamamos la atención del lector acerca de que en el teorema 2 sólo se trata de una transformación, la multiplicación (o división) de ambas partes de la ecuación por una misma expresión. La posterior simplificación de la fracción (si ella es posible), es una nueva trans-

formación de la ecuación. P.ej., al multiplicar ambos miembros de la ecuación $\frac{x+1}{2x}+x=3$ por la expresión $\varphi(x)=2x$ realizamos la primera transformación que conduce a la ecuación $\frac{2x(x+1)}{2x}+2x^2=$ $=6x$. La siguiente simplificación de la fracción $\frac{2x(x+1)}{2x}$ por $2x$ es una nueva transformación: ella nos lleva a la ecuación $x+1+2x^2=$ $=6x$. Semejante simplificación puede también conducir a una ecuación que no es equivalente a la inicial.

Así, si ambos miembros de $\frac{x^2-5x+6}{x-2}=0$ se multiplican por $\varphi(x)=x-2$, obtenemos la ecuación $\frac{(x^2-5x+6)(x-2)}{x-2}=0$ equivalente a la dada, ya que la expresión $\varphi(x)=x-2$ está definida con todos los valores de x del campo de definición de la ecuación dada ($x\neq 2$) y en ningún lugar de dicho campo no se anula. Pero, si en el primer miembro de la ecuación obtenida realizamos la simplificación por $x-2$, obtenemos la ecuación $x^2-5x+6=0$ no equivalente a la inicial: el valor $x=2$ es la solución de la última ecuación, pero no satisface la ecuación inicial, es decir, para ella es una raíz extraña. La cuestión radica en que al simplificar la fracción se produjo la ampliación del campo de definición y, como ya hemos indicado, esto puede acarrear la aparición de raíces extrañas.

COROLARIO. *Si ambos miembros de una ecuación se multiplican (o dividen) por un mismo número distinto de cero, obtenemos una ecuación equivalente a la inicial.*

P. ej., al multiplicar ambos miembros de la ecuación $\frac{x+1}{2}=$ $=\frac{x+3}{3}$ por 6, obtenemos la ecuación $3x+3=2x+6$ equivalente a la dada.

TEOREMA 3. *Si ambos miembros de la ecuación $f(x)=g(x)$, donde $f(x)\cdot g(x)\geqslant 0$ con todos los valores de x del campo de definición de la ecuación, se elevan a una misma potencia natural n, obtenemos la ecuación $(f(x))^n=(g(x))^n$ equivalente a la dada.*

Si, p.ej., ambos miembros de la ecuación $2x-1=\sqrt{x-1}$ se elevan al cuadrado, obtenemos la ecuación $(2x-1)^2=(\sqrt{x-1})^2$ equivalente a la dada, ya que con todas las x del campo de definición de la ecuación dada ($x\geqslant 1$) los dos miembros de ésta no son negativos.

Pero, si elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación $x-6=\sqrt{x}$, obtenemos la ecuación $(x-6)^2=(\sqrt{x})^2$, respecto de la cual no podemos afirmar que es equivalente a la prefijada, ya que

con ciertos valores de x del campo de definición de la ecuación inicial ($x \geqslant 0$) su primer miembro toma valor negativo (p.ej., con $x = 2$ tenemos: $x - 6 = -4 < 0$), en tanto que el segundo miembro siempre es no negativa. En efecto, la ecuación $(x - 6)^2 = (\sqrt{x})^2$ se transforma a la forma $x^2 - 13x + 36 = 0$, de donde $x_1 = 9$, $x_2 = 4$. Pero $x = 4$ es raíz extraña para la ecuación inicial.

Indiquemos que en el teorema 3 sólo se habla acerca de una transformación: la elevación de ambos miembros de la ecuación a una misma potencia natural. La eliminación posterior del signo de radicación (si esto es posible) es una nueva transformación de la ecuación. La eliminación del signo de radicación puede conducir a la ampliación del campo de definición de la ecuación y, por consiguiente, a una ecuación no equivalente a la inicial.

OBSERVACIONES: 1. El teorema 3 sólo es válido para las ecuaciones sobre el campo de números reales.

2. Si n es un número impar, en la enunciación del teorema 3 es posible omitir la condición: $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ para toda x del campo de definición de la ecuación.

Al resolver ecuaciones también hay que emplear transformaciones no indicadas en los teoremas 1, 2 y 3, es decir, aquellas que pueden conducir a la aparición de raíces extrañas o bien, incluso a la pérdida de raíces. La causa de la aparición de raíces extrañas o de la pérdida de éstas pueden ser las transformaciones realizadas con ayuda de fórmulas que hacen variar el campo de definición de la ecuación. P.ej., tales son las fórmulas:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad (\sqrt{a})^2 = a,$$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y, \quad a^{\log_a b} = b,$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1, \quad \operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}, \text{ etc.}$$

En todos los casos cuando las transformaciones realizadas conducen a una ecuación que es su corolario, pero no hay seguridad de que estas ecuaciones son equivalentes, es necesaria la verificación de las soluciones halladas. Si ésta no se ha efectuado, la solución no puede considerarse, en tal caso, acabada.

¿Cómo se verifican las soluciones halladas? Es posible indicar dos procedimientos principales: 1) poniendo cada una de las soluciones halladas en la ecuación inicial; 2) demostrando la equivalencia de las transformaciones realizadas de la ecuación en todas las etapas de la resolución.

EJEMPLO 1 Resolvamos la ecuación $\sqrt{2x+5} = 8 - \sqrt{x-1}$.

SOLUCIÓN. Elevemos ambos miembros de la ecuación al cuadrado. Obtenemos: $2x+5=(8-\sqrt{x-1})^2$ y, a continuación, $16\sqrt{x-1}=$ $=58-x$.

De nuevo elevamos al cuadrado: $256(x-1)=(58-x)^2$ y, más adelante,

$$x^2-372x+3620=0,$$

de donde $x_1=10$, $x_2=362$.

Si analizamos las transformaciones realizadas, podemos sólo afirmar que cada nueva ecuación fue el corolario de la anterior. (No hay seguridad en la equivalencia de las ecuaciones obtenidas durante la resolución.) Pero esto significa que en el proceso de resolución pudieron aparecer raíces extrañas, por lo que las raíces halladas han de ser verificadas.

VERIFICACIÓN. En nuestro caso las raíces halladas se pueden verificar con facilidad poniéndolas en la ecuación inicial. Verifiquemos $x_1=10$. Tenemos: $\sqrt{2x_1+5}=\sqrt{2\cdot 10+5}=5$ y $8-\sqrt{x_1-1}=$ $=8-\sqrt{10-1}=5$.

Así, pues, con $x=10$ los dos miembros de la ecuación inicial toman iguales valores numéricos, o sea, $x=10$ es la raíz de la ecuación dada.

Verifiquemos $x_2=362$. Tenemos: $\sqrt{2x_2+5}=\sqrt{2\cdot 362+5}=27$, en tanto que $8-\sqrt{x_2-1}=8-\sqrt{362-1}=-11$.

Con $x=362$ los miembros primero y segundo de la ecuación inicial toman diferentes valores numéricos, es decir, $x=362$ es una raíz extraña.

Así, pues, nuestra ecuación sólo tiene una raíz: $x=10$.

EJEMPLO 2. Resolvamos la ecuación $\sqrt{3x+1}=3+\sqrt{x-1}$.

SOLUCIÓN. Elevemos ambos miembros de la ecuación al cuadrado:

$$3x+1=(3+\sqrt{x-1})^2$$

y, a continuación, $6\sqrt{x-1}=2x-7$.

Una vez más realizamos la elevación al cuadrado: $36(x-1)=$ $=(2x-7)^2$ y, después, $4x^2-64x+85=0$, de donde hallamos:

$$x_1=\frac{16+3\sqrt{19}}{2}, \quad x_2=\frac{16-3\sqrt{19}}{2}.$$

VERIFICACIÓN. Está claro, que la verificación de las raíces halladas, poniéndolas en la ecuación inicial, está ligada con considerables dificultades de cálculo. Por ello, elegimos otro procedimiento de verificación.

El campo de definición de la ecuación dada es el siguiente: $x \geqslant 1$. En él la primera elevación al cuadrado es una transformación equivalente de la ecuación. La segunda elevación al cuadrado fue aplicada a la ecuación $6\sqrt{x-1} = 2x - 7$. A esta ecuación pueden sólo satisfacer tales valores de x que satisfagan a la desigualdad $2x - 7 \geqslant 0$, o sea, $x \geqslant 3{,}5$. Es fácil establecer que la desigualdad $\frac{16+3\sqrt{19}}{2} \geqslant 3{,}5$ es real, mientras que la desigualdad $\frac{16-3\sqrt{19}}{2} \geqslant 3{,}5$ es falsa. O sea, $x_2 = \frac{16-3\sqrt{19}}{2}$ es una raíz extraña y $x_1 = \frac{16+3\sqrt{19}}{2}$, la única raíz de la ecuación dada.

EJEMPLO 3. Resolvamos la ecuación
$\log(x^2 - 7x + 3) - \log(2x + 1) = \log(x^2 + 7x - 3) - \log(2x - 1)$.

SOLUCIÓN. Transformemos la ecuación a la forma

$$\log\frac{x^2-7x+3}{2x+1} = \log\frac{x^2+7x-3}{2x-1}$$

y, a continuación, $\frac{x^2-7x+3}{2x+1} = \frac{x^2+7x-3}{2x-1}$, de donde hallamos: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{5}$.

VERIFICACIÓN. Como cada una de las ecuaciones obtenidas en una u otra etapa de la resolución sólo es el corolario de la anterior, no pudo tener lugar la pérdida de raíces, pero pudieron aparecer raíces extrañas, con la particularidad de que sólo a cuenta de la ampliación del campo de definición de la ecuación inicial. Por esta razón, en el presente caso, es posible efectuar la verificación con ayuda del campo de definición de la ecuación dada que se prefija con el siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} x^2-7x+3>0 \\ 2x+1>0 \\ x^2+7x-3>0 \\ 2x-1>0. \end{cases}$$

Ni $x=0$, ni $x_2 = \frac{2}{5}$ satisfacen la última igualdad del sistema y, por lo tanto, son raíces extrañas. Así, pues, la ecuación no tiene raíces.

EJERCICIOS

Demuestren que las siguientes ecuaciones no tienen raíces:

285. $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}=\sqrt{x-5}$.

286. $\sqrt[4]{x^2-144}=\sqrt{x-8}+\sqrt{8-x}$.

287. $\log_2(x^2-1)+\log_3(x^3-1)+\log_4(1-x^4)=\sqrt{x}$.

288. $2^{\log_{2x}(x+2)}+3^{\log_2(x+3)}=\sqrt{-1-x}$.

289. $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}=x-5$.

290. $x^2+\frac{1}{x^2-16}=16+\frac{1}{x^2-16}$.

291. $\log(10-x^2)=\sqrt{x}+\sqrt{x+2}$.

292. $2^{\log_2(x-3)}=2x-5$.

293. $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^4+1}=1$. 294. $x^4+x^2+1=\log_{\frac{1}{3}}2$.

¿Son equivalentes las siguientes ecuaciones?

295. $x^2+1=\sqrt{x}$ y $x^2+1+\sqrt{1-x}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$.

296. $x^2-1=\sqrt{x}$ y $x^2-1+\sqrt{1-x}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$.

297. $x^3+x=0$ y $\frac{x^3+x}{x}=0$. 298. $x^2+1=0$ y $\frac{x^2+1}{x}=0$.

299. $\frac{2x^2+2x+3}{x+3}=\frac{3x^2+2x-1}{x+3}$ y $2x^2+2x+3=3x^2+2x-1$.

300. $\frac{2x^2+2x+3}{x+2}=\frac{3x^2+2x-1}{x+2}$ y $2x^2+2x+3=3x^2+2x-1$.

301. $\sqrt{x}+2=\sqrt{2x}+1$ y $(\sqrt{x}+2)^2=(\sqrt{2x}+1)^2$.

302. $(\sqrt{x}-2)^2=(\sqrt{2x}+1)^2$ y $x-4\sqrt{x}+4=2x+2\sqrt{2x}+1$.

303. $2\sqrt{x}-7x^2=2\left(\frac{x}{2}+\sqrt{x}\right)$ y $2\sqrt{x}-7x^2=2x+2\sqrt{x}$.

304. $2\sqrt{x}-7x^2=2x+2\sqrt{x}$ y $-7x^2=2x$.

¿Son equivalentes las siguientes ecuaciones y conjuntos de ecuaciones? (expliquen la respuesta):

305. $(x-4)(x+3)=0$ y $x-4=0$; $x+3=0$.

306. $(x-4)\left(x+\frac{1}{x+3}\right)=0$ y $x-4=0$; $x+\frac{1}{x+3}=0$.

307. $(x-4)\left(x+\frac{1}{x-4}\right)=0$ y $x-4=0$; $x+\frac{1}{x-4}=0$.

308. $\sqrt{x-2}\sqrt{x+3}=0$ y $\sqrt{x-2}=0$; $\sqrt{x+3}=0$.

309. $\sqrt{2-x}\sqrt{x+3}=0$ y $\sqrt{2-x}=0$; $\sqrt{x+3}=0$.

310. $(x-3)\log(2-x)=0$ y $x-3=0$; $\log(2-x)=0$.

311. $(2-x)\log(x-3)=0$ y $2-x=0$; $\log(x-3)=0$.

312. $\frac{(x^2-2x-3)(x+1)}{x-3}=0$ y $x^2-2x-3=0$; $x+1=0$.

313. $\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}\left(2^{\frac{x+4}{x^2-9}}-1\right)=0$ y $\begin{cases} x^2-5x+6=0 \\ 2^{\frac{x+4}{x^2-9}}-1=0. \end{cases}$

Resuelvan las siguientes ecuaciones y efectúen la verificación. Si hay raíces extrañas expliquen la causa de su aparición.

314. $\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2x-x^2}$.

315. $\frac{x+2}{x+1}+\frac{2-x}{1-x}+\frac{4}{x-1}=0$.

316. $\frac{x}{2x-1}+\frac{25}{4x^2-1}=\frac{1}{27}-\frac{13}{1-2x}$.

317. $\frac{6}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}=2-\frac{x+4}{x-1}$.

318. $1+\sqrt{2x+7}=x-3$.

319. $\frac{x-2}{\sqrt{2x-7}}=\sqrt{x-4}$. 320. $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$.

321. $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$. 322. $\sqrt{3x-2}=2\sqrt{x+2}-2$.

323. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$. 324. $\log(54-x^3)=3\log x$.

325. $\log(x-2)+\log(x-3)=1-\log 5$.

326. $\log\sqrt{5x-4}+\log\sqrt{x+1}=2+\log 0{,}18$.

327. $\frac{\log(3x-5)}{\log(3x^2+25)}=\frac{1}{2}$. 328. $\frac{\log(2x-5)}{\log(x^2-8)}=0{,}5$.

329. $\log_x(2x^2-7x+12)=2$.

330. $\log_x(2x^2-4x+3)=2$.

§ 8. Ecuaciones racionales

En el presente párrafo se estudian las ecuaciones del tipo $P(x)=0$, $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, así como las ecuaciones del tipo $f(x)=g(x)$, donde $f(x)$ y $g(x)$ son expresiones racionales.

Recordemos algunos conceptos de álgebra.

1. Todo polinomio de grado n sobre un campo de números complejos tiene n raíces complejas.

2. Si $x=a$ es la raíz de polinomio $P(x)$, $P(x)$ se divide entre el binomio $x-a$ sin resto.

3. Sean números enteros todos los coeficientes del polinomio $P(x)$ con la particularidad de que el mayor es igual a 1. Si semejante polinomio tiene como su raíz un número racional, éste es un número entero.

4. Sean números enteros todos los coeficientes del polinomio $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$. Si la raíz del polinomio es el número entero b, éste es el divisor del término independiente a_n (condición necesaria para la existencia de la raíz entera).

Señalemos que al resolver ecuaciones enteras racionales sólo se realizan transformaciones equivalentes, por esta razón las raíces halladas no se verifican; no hay necesidad de indicar esto en cada caso concreto. Pero, al resolver ecuaciones racionales fraccionarias, se efectúa la multiplicación de ambos miembros de la ecuación por una misma expresión (eliminación de denominadores), lo que puede conducir a la aparición de raíces extrañas. Por ello, al resolver ecuaciones racionales fraccionarias es preciso ejecutar la verificación.

Durante la resolución de ecuaciones racionales los métodos principales son los siguientes: 1) descomposición en factores; 2) introducción de nuevas variables (auxiliares).

El método de descomposición en factores consiste en lo siguiente: sea

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x),$$

entonces cualquier solución de la ecuación

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

es la solución del conjunto de ecuaciones

$$f_1(x) = 0; \quad f_2(x) = 0; \quad \ldots; \quad f_n(x) = 0. \tag{2}$$

La afirmación inversa es incierta: no toda solución del conjunto de ecuaciones (2) es la solución de la ecuación (1).

Así, p.ej., la ecuación

$$\frac{x^2-3x+2}{x} \cdot \left(\frac{x+2}{x^2-1} + 2\right) = 0 \tag{3}$$

se reduce al conjunto de ecuaciones:

$$\frac{x^2-3x+2}{x} = 0; \quad \frac{x+2}{x^2-1} + 2 = 0. \tag{4}$$

Las soluciones del conjunto (4) son los valores: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = -\frac{1}{2}$.

Pero, con $x = 1$ no queda definida la expresión $\frac{x+2}{x^2-1}$ y con $x = 0$, la expresión $\frac{x^2-3x+2}{x}$.

Así, pues, los valores $x = 1$, $x = 0$ no son raíces de la ecuación (3).

En general, al resolver la ecuación (1) según el método de descomposición en factores de las raíces halladas de las ecuaciones del conjunto (2) satisfacen la ecuación (1) aquellos, y sólo aquellos, valores de x que pertenecen al campo de definición de la ecuación (1).

EJEMPLO 1. Resolvamos la ecuación $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0$.

SOLUCIÓN. Descompongamos en factores el primer miembro de la ecuación. Tenemos: $x^2(x+2)+3(x+2)=0$ y, más adelante $(x+2)(x^2+3)=0$.

La última ecuación es equivalente al conjunto de ecuaciones:

$$x+2=0;\quad x^2+3=0.$$

Después de resolver este conjunto, obtenemos: $x_1=-2$, $x_{2,3}=\pm i\sqrt{3}$. Estas son las raíces de la ecuación dada.

EJEMPLO 2. Resolvamos la ecuación $x^4+x^3+3x^2+2x+2=0$.

SOLUCIÓN. Los intentos de realizar en el primer miembro de la ecuación una agrupación análoga a la hecha en el ejemplo 1 son infructuosos. Por ello, intentamos representar alguno de los términos de la ecuación en forma de la suma de varios sumandos de modo que la agrupación, que permita obtener una descomposición «ventajosa» en factores, sea ejecutable. Hagamos $3x^2=x^2+2x^2$.

Entonces obtenemos: $(x^4+x^3+x^2)+(2x^2+2x+2)=0$ y, a continuación, $x^2(x^2+x+1)+2(x^2+x+1)=0$, $(x^2+x+1)(x^2+2)=0$.

Nos queda por resolver el conjunto de ecuaciones: $x^2+x+1=0$; $x^2+2=0$.

De este conjunto hallamos: $x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$; $x_{3,4}=\pm i\sqrt{2}$.

EJEMPLO 3. Resolvamos la ecuación $x^3+4x^2-24=0$.

SOLUCIÓN. Intentemos hallar la raíz entera de la ecuación prefijada. Con este fin, escribimos los divisores del término independiente:

$$\alpha=\pm1;\quad \pm2;\quad \pm3;\quad \pm4;\quad \pm6;\quad \pm12;\quad \pm24.$$

Después de esto, comenzamos las pruebas. En lugar de x pongamos en la ecuación dada el valor $\alpha=1$. Obtenemos: $1^3+4\cdot1^2-24\neq0$.

De modo que $x=1$ no es la raíz de la ecuación. Continuamos las pruebas: $\alpha=-1:(-1)^3+4\cdot(-1)^2-24\neq0$, $\alpha=2:2^3+4\cdot2^2-24=0$. Así, pues, $x_1=2$ es la raíz de la ecuación.

La ecuación dada es de tercer grado, lo que quiere decir que ella tiene dos raíces más. Hagamos uso de que el polinomio x^3+4x^2-24 se divide entre $x-2$ sin resto. Efectuemos dicha división

$$\begin{array}{r|l} x^3+4x^2\qquad\quad -24 & x-2 \\ \cline{2-2} -(x^3-2x^2)\qquad\qquad\quad & x^2+6x+12 \\ \hline 6x^2\qquad\qquad\quad & \\ -(6x^2-12x)\qquad\quad & \\ \hline 12x-24 & \\ -(12x-24) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

De este modo, $x^3 + 4x^2 - 24 = (x - 2)(x^2 + 6x + 12)$, debido a lo cual la ecuación toma la forma:

$$(x - 2)(x^2 + 6x + 12) = 0.$$

Esta ecuación es equivalente al conjunto de ecuaciones (una de las que, de hecho, ya se ha resuelto): $x - 2 = 0$; $x^2 + 6x + 12 = 0$. De la segunda ecuación del conjunto hallamos: $x_{2,3} = -3 \pm i\sqrt{3}$.

Así, pues, la ecuación dada tiene las siguientes raíces: $x_1 = 2$, $x_2 = -3 + i\sqrt{3}$, $x_3 = -3 - i\sqrt{3}$.

OBSERVACIÓN. La ecuación $x^3 + 4x^2 - 24 = 0$ puede resolverse de acuerdo con el método de descomposición en factores. Representando $4x^2$ en forma de la suma $-2x^2 + 6x^2$, obtenemos sucesivamente:

$$x^3 - 2x^2 + 6x^2 - 24 = 0$$

$$x^2(x-2) + 6(x-2)(x+2) = 0, \text{ etc.}$$

EJEMPLO 4. Resolvamos la ecuación $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.

SOLUCIÓN. Apliquemos el método de introducción de una nueva variable. Hagamos $y = x^3$. Entonces, la ecuación prefijada toma la forma: $y^2 - 9y + 8 = 0$, de donde hallamos: $y_1 = 1$, $y_2 = 8$. A continuación, el problema se reduce a resolver el conjunto de ecuaciones: $x^3 = 1$; $x^3 = 8$.

Resolvamos la primera ecuación. Tenemos: $x^3 - 1 = 0$ y, después, $(x-1)(x^2+x+1) = 0$, de donde $x_1 = 1$; $x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

De manera análoga, de la segunda ecuación del conjunto hallamos:

$$x_4 = 2; \quad x_{5,6} = -1 \pm i\sqrt{3}.$$

EJEMPLO 5. Resolvamos la ecuación

$$(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 15x^2 = 0.$$

SOLUCIÓN. Hagamos $y = x^2 + x + 4$. Entonces la ecuación dada toma la forma:

$$y^2 + 8xy + 15x^2 = 0.$$

Resolvamos esta ecuación como cuadrática con relación a y:

$$y_{1,2} = -4x \pm \sqrt{16x^2 - 15x^2}.$$

De modo que $y_1 = -3x$, $y_2 = -5x$. Así, pues, el problema se reduce a la resolución del siguiente conjunto de ecuaciones:

$$x^2 + x + 4 = -3x; \quad x^2 + x + 4 = -5x.$$

De este conjunto hallamos: $x_{1,2} = -2$; $x_{3,4} = -3 \pm \sqrt{5}$.

EJEMPLO 6. Resolvemos la ecuación $21x^3 + x^2 - 5x - 1 = 0$.

SOLUCIÓN Las ecuaciones en las que el primer miembro es un polinomio con coeficientes enteros y término independiente igual a 1 ó —1, se transforman con facilidad en ecuaciones reducidas mediante la división término a término por x a la mayor potencia (es fácil ver que semejante división no conduce a la pérdida de raíces, ya que $x = 0$ no es raíz de la ecuación, donde el término independiente es distinto de cero) y la posterior sustitución de $\frac{1}{x}$ por y. En nuestro ejemplo, obtenemos:

$$21+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}=0.$$

Haciendo $\frac{1}{x} = y$, llegamos a la ecuación $21 + y - 5y^2 - y^3 = 0$ y, a continuación, $y^3 + 5y^2 - y - 21 = 0$. Hallando, según el método de pruebas como en el ejemplo 3, la raíz entera de la ecuación $y_1 = -3$ y dividiendo el polinomio $y^3 + 5y^2 - y - 21$ por $y + 3$, obtenemos el trinomio de segundo grado $y^2 + 2y - 7$ con las raíces de segundo grado y^2+2y-7 con las raíces $y_{2,3} = -1 \pm 2\sqrt{2}$.

Puesto que $x = \frac{1}{y}$, $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_{2,3} = \frac{1 \pm 2\sqrt{2}}{7}$.

EJEMPLO 7. Resolvamos la ecuación $4x^3 + 10x^2 - 14x - 5 = 0$.

SOLUCIÓN Aquí vamos a emplear un procedimiento más para transformar una ecuación no reducida en reducida (el objetivo de tal transformación está claro: la ecuación reducida tiene como raíces racionales sólo números enteros y nosotros tenemos procedimientos para hallar raíces enteras). Multipliquemos ambos miembros de la ecuación inicial por un número tal que el coeficiente de x^3 sea el cubo de cierto número entero. En nuestro ejemplo, tal factor puede ser el número 2. Multipliquemos ambos miembros de la ecuación por 2:

$$8x^3 - 20x^2 + 28x - 10 = 0.$$

Ahora, haciendo $y = 2x$, la ecuación toma la forma:

$$y^3 - 5y^2 + 14y - 10 = 0.$$

Como en los anteriores ejemplos, hallamos las raíces de la ecuación reducida: $y_1 = 1$, $y_{2,3} = 2 \pm i\sqrt{6}$. Siendo $x = \frac{y}{2}$, las raíces de la ecuación inicial son las siguientes: $x_1 = \frac{1}{2}$,

$$x_{2,3} = \frac{2 \pm i\sqrt{6}}{2}.$$

EJEMPLO 8. Resolvamos la ecuación

$$3x^4-2x^3+4x^2-4x+12=0. \qquad (5)$$

SOLUCIÓN. La ecuación dada tiene una interesante peculiaridad; la razón entre su primer coeficiente y el término independiente y el cuadrado de la razón entre el segundo coeficiente y el penúltimo son iguales entre sí. Las ecuaciones con semejante peculiaridad reciben el nombre de *recíprocas*. En este ejemplo vamos a mostrar el procedimiento para resolver una ecuación recíproca de cuarto grado.

Dividamos ambos miembros de la ecuación por x^2 (esto no conduce a la pérdida de raíces, ya que el valor de $x=0$ no es raíz de la ecuación dada). Obtenemos:

$$3x^2-2x+4-\frac{4}{x}+\frac{12}{x^2}=0$$

y, a continuación,

$$3\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{2}{x}\right)+4=0. \qquad (6)$$

Hagamos $x+\frac{2}{x}=y$, entonces $\left(x+\frac{2}{x}\right)^2=y^2$ y, por lo tanto, $x^2+\frac{4}{x^3}=y^2-4$. Sustituyendo en la ecuación (6) $x+\frac{2}{x}$ por y y $x^2+\frac{4}{x^2}$ por y^2-4, obtenemos: $3(y^2-4)-2y+4=0$, de donde $y_1=2$, $y_2=-\frac{4}{3}$.

Ahora el problema se reduce a resolver el conjunto de ecuaciones:

$$x+\frac{2}{x}=2;\; x+\frac{2}{x}=-\frac{4}{3}.$$

De este conjunto hallamos: $x_{1,2}=1\pm i$, $x_{3,4}=-\frac{2}{3}\pm\frac{i\sqrt{14}}{3}$.

Estas son las raíces de la ecuación (5).

(т) EIEMPLO 9. Resolvamos la ecuación $x^2+\frac{9x^2}{(x+3)^2}=27$.

SOLUCIÓN. El primer miembro es una suma de cuadrados. Esto lleva a la idea de añadir a ambos miembros de la ecuación una expresión tal, con la que el primer miembro se convierta en el cuadrado perfecto de la suma. Así, pues, adicionando a ambos miembros de la ecuación la expresión $-2x\frac{3x}{x+3}$, obtenemos:

$$\left(x-\frac{3x}{x+3}\right)^2=27-6\frac{x^2}{x+3}$$

y, a continuación,

$$\left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2+6\,\frac{x^2}{x+3}-27=0.$$

Ahora, hagamos $y=\frac{x^2}{x+3}$. Entonces la ecuación toma la forma: $y^2+6y-27=0$ y, de aquí, $y_1=-9$, $y_2=3$.

El problema se ha reducido a la resolución del conjunto de ecuaciones

$$\frac{x^2}{x+3}=-9;\quad \frac{x^2}{x+3}=3.$$

De la primera ecuación hallamos $x_{1,2}=-\frac{9}{2}\pm i\,\frac{3\sqrt{3}}{2}$, de la segunda, $x_{3,4}=\frac{2}{3}\pm\frac{3\sqrt{5}}{2}$. Todos los valores hallados satisfacen la condición $x+3\neq 0$ y, por consiguiente, son las raíces de la ecuación inicial.

EJERCICIOS

Resuelvan las siguientes ecuaciones según el método de descomposición en factores:

331. $x^4-1=0$. 332. $x^6-64=0$. 333. $x^4+16=0$.
334. $x^6+1=0$ 335. $x^3+x-2=0$. 336. $x^3-4x^2+x+6=0$.
337. $x^3+9x^2+23x+15=0$.
338. $(x-1)^3+(2x+3)^3=27x^3+8$.
339. $2x^4-21x^3+74x^2-105x+50=0$.
340. $x^4+5x^3+4x^2-24x-24=0$.
341. $x^5-4x^4+4x^3-x^2+4x-4=0$.
342. $x^5+4x^4-6x^3-24x^2-27x-108=0$.
343. $(x+1)(x^2+2)+(x+2)(x^2+1)=2$.
344. $3\left(x+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$.
345. $\frac{(3+x)(2+x)(1+x)}{(3-x)(2-x)(1-x)}=-35$.
346. $\frac{x-2}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{x-4}{x-3}+\frac{x+4}{x+3}-\frac{28}{15}$.
347. $2x^4-x^3+5x^2-x+3=0$.
348. $2x^4-4x^3+13x^2-6x+15=0$.

Resuelvan las siguientes ecuaciones según el método de introducción de una variable auxiliar:

349. $x^8-15x^4-16=0$.
350. $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3)=1$.
351. $(x^2-2x-5)^2-2(x^2-2x-3)-4=0$;
352. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2{,}9$. 353. $\frac{3}{1+x+x^2}=3-x-x^2$.
354. $\frac{x^2-x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$.

355. $\frac{1}{x^2-3x+3}+\frac{2}{x^2-3x+4}=\frac{6}{x^2-3x+5}$.

356. $x^3-x^2-\frac{8}{x^3-x^2}=2$.

357. $x(x-1)(x-2)(x-3)=15$.
358. $(x-1)x(x+1)(x+2)=24$.
359. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3$.
360. $(8x+7)^2(4x+3)(x+1)=4,5$.
361. $(x-4,5)^4+(x-5,5)^4=1$.
362. $(x+3)^4+(x+5)^4=16$.

Resuelvan las ecuaciones:
363. $10x^3-3x^2-2x+1=0$. 364. $4x^3-3x-1=0$.
365. $38x^3+7x^2-8x-1=0$. 366. $4x^3+6x^2+4x+1=0$.
367. $16x^3-28x^2+4x+3=0$.
368. $100x^3-120x^2+47x-6=0$.
369. $6x^3-13x^2+9x-2=0$. 370. $4x^3+6x^2+5x+69=0$.
371. $3x^3-2x^2+x-10=0$. 372. $32x^3-24x^2-12x-77=0$.
373. $4x^3+2x^2-8x+3=0$.

374. $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0$.

375. $4x^2+12x+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=47$.

376. $x^2+x+x^{-1}+x^{-2}=4$. 377. $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=5\left(\frac{x}{3}+\frac{4}{x}\right)$.
378. $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$.
379. $x^4+x^3+4x^2+5x+25=0$;
380. $x^4+2x^3-7x^2+4x+4=0$.
381. $16x^4+8x^3-7x^2+2x+1=0$.

382. $x^4-8x+63=0$. 383. $\frac{x^2-6x-9}{x}=\frac{x^2-4x-9}{x^2-6x-9}$.

§ 9. Ecuaciones que contienen una variable bajo el signo de módulo

Al resolver ecuaciones que contienen una variable bajo el signo de módulo se utilizan con la mayor frecuencia los siguientes métodos: 1) supresión del módulo por definición; 2) elevación de ambos miembros de la ecuación al cuadrado; 3) método de partición en intervalos.

EJEMPLO 1. Resolvamos la ecuación

$$|2x-3|=5. \tag{1}$$

SOLUCIÓN. *1-er procedimiento.* Como por definición

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) \text{ si } f(x)\geqslant 0, \\ -f(x) \text{ si } f(x)<0, \end{cases}$$

la ecuación (1) es equivalente al siguiente conjunto de dos sistemas mixtos:

$$\begin{cases} 2x-3\geqslant 0 \\ 2x-3=5 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x-3<0 \\ -(2x-3)=5. \end{cases}$$

Del primer sistema de este conjunto hallamos $x_1 = 4$, del segundo, $x_2 = -1$.

2-do procedimiento. Como ambos miembros de la ecuación (1) no son negativos, ella es equivalente a la siguiente: $|2x-3|^2 = 25$. Pero, $|f(x)|^2 = (f(x))^2$. Por ello, la ecuación (1) es equivalente a la ecuación $(2x-3)^2 = 25$, de donde obtenemos: $x_1 = 4$, $x_2 = -1$.

EJEMPLO 2. Resolvamos la ecuación

$$|2x-3| = x+1. \tag{2}$$

SOLUCIÓN Como la anterior, esta ecuación puede ser resuelta de dos procedimientos. Al resolverla según el primer procedimiento obtendremos el siguiente conjunto de sistemas mixtos, equivalentes a la ecuación (2).

$$\begin{cases} 2x-3\geqslant 0 \\ 2x-3=x+1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x-3<0 \\ -(2x-3)=x+1, \end{cases}$$

de donde hallamos $x_1=4$, $x_2=\frac{2}{3}$.

Al resolver la ecuación de acuerdo con el segundo procedimiento, hay que tener en cuenta que la expresión $x+1$ en el segundo miembro de (2), según el sentido de la ecuación, debe ser positiva: $x+1 \geqslant 0$. Debido a esta condición la elevación al cuadrado de ambos miembros de la ecuación conducirá a otra ecuación equivalente a la inicial. O sea, la ecuación (2) es equivalente al sistema mixto:

$$\begin{cases} x+1\geqslant 0 \\ (2x-3)^2=(x+1)^2, \end{cases}$$

que, al resolverlo, nos proporciona $x_1=4$, $x_2=\frac{2}{3}$.

EJEMPLO 3. Resolvamos la ecuación

$$|2x-3| = |x+7|. \tag{3}$$

SOLUCIÓN Es fácil cerciorarse de que el procedimiento «elevación al cuadrado» (segundo procedimiento) es aquí el más conveniente. En efecto, al aplicar dicho procedimiento, obtenemos una ecuación equivalente a la (3):

$(2x-3)^2=(x+7)^2$, de donde $x_1=10$, $x_2=-\frac{4}{3}$.

EJEMPLO 4. Resolvamos la ecuación

$$|3 - x| - |x + 2| = 5. \qquad (4)$$

SOLUCION. En este caso es preferible el método de «partición en intervalos» (tercer procedimiento).

Marquemos en la recta numérica el valor de x con el que $3 - x = 0$ y el valor de x con el que $x + 2 = 0$. Con ello, la recta numérica se dividirá en los intervalos $]-\infty; -2[$, $[-2; 3]$, $]3; \infty[$. Resolvamos la ecuación (4) en cada uno de los indicados intervalos, es decir, el conjunto de sistemas mixtos, equivalente a (4):

$$\begin{cases} -\infty < x < -2 \\ 3 - x + x + 2 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 3 \\ 3 - x - x - 2 = 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3 < x < \infty \\ -3 + x - x - 2 = 5, \end{cases}$$

o bien

$$\begin{cases} x < -2 \\ 5 = 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 3 \\ x = -2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x > 3 \\ -5 = 5. \end{cases}$$

La solución del primer sistema de este conjunto es el rayo $]-\infty; -2[$, del segundo sistema hallamos que $x = -2$, y el tercero, no tiene solución. Unificando las soluciones de estos tres sistemas obtenemos la solución de la ecuación (4): $]-\infty; -2]$.

EJEMPLO 5. Resolvamos la ecuación

$$|x - 2| + |x - 1| = x - 3. \qquad (5)$$

SOLUCION. La ecuación (5) es muy parecida a la resuelta en el anterior ejemplo, es decir, a primera vista puede parecer que su más conveniente resolución se llevaría a cabo según el método de «partición en intervalos». Pero, de la ecuación (5) está claro que $x - 3 > 0$, o sea, $x > 3$ y, entonces, asimismo, $x - 2 > 0$ y $x - 1 > 0$. Así, pues, la ecuación (5) es equivalente al sistema mixto $\begin{cases} x - 2 + x - 1 = x - 3 \\ x > 3 \end{cases}$ que es equivalente a $\begin{cases} x = 0 \\ x > 3 \end{cases}$ que no tiene soluciones.

De modo que la ecuación no tiene raíces.

EJERCICIOS

Resuelvan las ecuaciones:

384. $|x| + x^3 = 0$. 385. $(x - 1)(|x| - 1) = -0,5$.

386. $\dfrac{4x - 8}{|x - 2|} = x$. 387. $\dfrac{7x + 4}{5} - x = \dfrac{|3x - 5|}{2}$.

388. $7 - 4x = |4x - 7|$. 389. $|3x - 5| = 5 - 3x$.

390. $|x^2 - 3x + 3| = 2$. 391. $|2x - x^2 + 3| = 2$.

392. $|x^2 + x - 1| = 2x - 1$. 393. $|x^2 - x - 3| = -x - 1$

394. $2|x^2 + 2x - 5| = x - 1$. 395. $x^2 + 3|x| + 2 = 0$

396. $(x + 1)^2 - 2|x + 1| + 1 = 0$. 397. $x^2 + 2x - 3|x + 1| + 3 = 0$.

398. $|x|+|x+1|=1$. 399. $|x+1|+|x+2|=2$.
400. $|x-1|-|x-2|=1$. 401. $|x-2|+|4-x|=3$.
402. $|x-1|+|x-2|=1$. 403. $|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9$.
404. $|2x+1|-|3-x|=|x-4|$.
405. $|x-1|+|1-2x|=2|x|$. 406. $|x|-2|x+1|+3|x+2|=0$.
407. $|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=|x+2|$.
408. $|x|-2|x+1|+3|x+2|=0$.
409. $|x|+2|x+1|-3|x-3|=0$.
410. $|x^2-9|+|x-2|=5$. 411. $|x^2-1|+x+1=0$.
412. $|x^2-4|-|9-x^2|=5$. 413. $|x^2-9|+|x^2-4|=5$.
414. $|x-x^2-1|=|2x-3-x^2|$
415. $|x^2+2x|-|2-x|=|x^2-x|$.
416. $||3-2x|-1|=2|x|$. 417. $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}=1$.

§ 10. Sistemas de ecuaciones racionales

1. Nociones fundamentales. Varias ecuaciones con dos variables x, y forman un *sistema* si se plantea el problema de la búsqueda de todos aquellos pares $(x; y)$ que satisfacen cada una de las ecuaciones dadas. Cada uno de dichos pares lleva el nombre de *solución* del sistema. Resolver un sistema de ecuaciones significa hallar todas sus soluciones. En particular, el conjunto de soluciones de un sistema puede ser vacío y, entonces, se dice que el sistema no tiene soluciones o que es un sistema *incompatible*.

Varios sistemas de ecuaciones con dos variables x, y forman un *conjunto de sistemas* si se plantea el problema de buscar todos los pares (x, y), cada uno de los cuales satisfaga, por lo menos, uno de los sistemas dados. Cada uno de tales pares se denomina solución del conjunto de sistemas.

El proceso de resolución de los sistemas de ecuaciones consiste, por regla, en el paso sucesivo, mediante ciertas transformaciones, del sistema dado a otro más «cómodo»; a continuación, a otro aún más «cómodo», etc. Si como resultado de ciertas transformaciones del sistema

$$\begin{cases} f_1(x, y)=g_1(x, y) \\ f_2(x, y)=g_2(x, y) \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_n(x, y)=g_n(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

pasamos al sistema

$$\begin{cases} f'_1(x, y)=g'_1(x, y) \\ f'_2(x, y)=g'_2(x, y) \\ \dots\dots\dots\dots \\ f'_n(x, y)=g'_n(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

y, si con ello, cada solución del sistema (1) es, simultáneamente, la solución del sistema (2), éste recibe el nombre de *corolario* del sistema (1). El corolario de un sistema de ecuaciones puede ser también una sola ecuación. P.ej., la ecuación $3x-2y=3$ es el corolario del sistema

$$\begin{cases}2x+y=5\\ x-3y=-2\end{cases}$$

(como la suma de las ecuaciones del sistema). En general, el corolario de un sistema de ecuaciones puede ser otro sistema con un número de ecuaciones tanto menor como mayor. Así, el sistema $\begin{cases}2x+y=5\\ x-3y=-2\\ 3x-2y=3\end{cases}$ es el corolario del sistema $\begin{cases}2x+y=5\\ x-3y=-2.\end{cases}$

A su vez, el sistema $\begin{cases}2x+y=5\\ x-3y=-2\end{cases}$ es el corolario del sistema $\begin{cases}2x+y=5\\ x-3y=-2\\ 3x-2y=3.\end{cases}$

Dos sistemas de ecuaciones reciben el nombre de *equivalentes* si los conjuntos de sus soluciones coinciden. Está claro, que dos sistemas son equivalentes si, y sólo si, el segundo es el corolario del primero y el primero, del segundo. En particular, de aquí se desprende que si en un sistema de ecuaciones se adiciona una ecuación más, corolario del sistema dado, el nuevo sistema es equivalente al inicial. Si omitimos cierta ecuación del sistema, la restante ecuación (o bien sistema de ecuaciones) será corolario del sistema inicial. Si en el planteamiento no se ha prefijado sobre qué conjunto ha de resolverse el sistema de ecuaciones racionales, se supone que es necesario resolverlo sobre un conjunto de números complejos.

Aducimos dos teoremas que se utilizan durante la resolución de sistemas de ecuaciones.

TEOREMA 1. *Si la ecuación* $f_1(x, y)=g_1(x, y)$ *es equivalente (es el corolario) a la ecuación* $f_1'(x, y)=g_1'(x, y)$, *mientras que la ecuación* $f_2(x, y)=g_2(x, y)$ *es equivalente (es el corolario) de la ecuación* $f_2'(x, y)=g_2'(x, y)$, *los sistemas*

$$\begin{cases}f_1(x, y)=g_1(x, y)\\ f_2(x, y)=g_2(x, y)\end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases}f_1'(x, y)=g_1'(x, y)\\ f_2'(x, y)=g_2'(x, y)\end{cases}$$

son equivalentes (el segundo sistema es el corolario del primero).

TEOREMA 2 *Si la ecuación* $f(x, y) = g(x, y)$ *es el corolario de las ecuaciones* $f_1(x, y) = g_1(x, y)$ *y* $f_2(x, y) = g_2(x, y)$, *el sistema*

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y) \\ f(x, y) = g(x, y) \end{cases} \quad o \ bien \quad \begin{cases} f_2(x, y) = g_2(x, y) \\ f(x, y) = g(x, y) \end{cases}$$

es el corolario del sistema

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y) \\ f_2(x, y) = g_2(x, y), \end{cases} \qquad (3)$$

en tanto que el sistema $\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y) \\ f_2(x, y) = g_2(x, y) \\ f(x, y) = g(x, y) \end{cases}$ *es equivalente al sistema* (3).

En particular, corolarios del sistema (3) serán tales sistemas:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y) \\ f_1(x, y) \pm f_2(x, y) = g_1(x, y) \pm g_2(x, y), \end{cases} \qquad (4)$$

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y) \\ f_1(x, y) \cdot f_2(x, y) = g_1(x, y) \cdot g_2(x, y), \end{cases} \qquad (5)$$

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y) \\ (f_1(x, y))^2 = (g_1(x, y))^2. \end{cases} \qquad (6)$$

Si no hay tales pares (x, y), con los que ambas ecuaciones $f_2(x, y)$ y $g_2(x, y)$ se reducen simultáneamente a cero, la ecuación $\frac{1}{f_2(x, y)} = \frac{1}{g_2(x, y)}$ es equivalente a la ecuación $f_2(x, y) = g_2(x, y)$. Entonces al sistema (3) será equivalente el siguiente sistema:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y) \\ \dfrac{1}{f_2(x, y)} = \dfrac{1}{g_2(x, y)} \end{cases}.$$

A su vez, su corolario es el sistema:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y) \\ f_1(x, y) \cdot \dfrac{1}{f_2(x, y)} = g_1(x, y) \cdot \dfrac{1}{g_2(x, y)} \end{cases}.$$

Así, pues, llegamos a la siguiente conclusión: *si no existen tales pares* (x, y), *con los que ambas expresiones* $f_2(x, y)$ *y* $g_2(x, y)$ *se reducen*

simultáneamente a cero, el sistema

$$\begin{cases} f_1(x,\ y) = g_1(x,\ y) \\ \dfrac{f_1(x,\ y)}{f_2(x,\ y)} = \dfrac{g_1(x_1\ y)}{g_2(x,\ y)} \end{cases} \qquad (7)$$

es el corolario del sistema (3).

Si al resolver el sistema lo hemos transformado en un sistema, que es corolario del inicial, las soluciones halladas del nuevo sistema obligatoriamente deben ser verificadas (p.ej., poniendo en el sistema inicial los valores obtenidos de las variables). A continuación, serán útiles las siguientes afirmaciones:

1. El sistema (4) es equivalente al (3).

2. Si no existen tales pares $(x,\ y)$, con los que ambos miembros de la ecuación $f_1(x,\ y) = g_1(x,\ y)$ se anulan simultáneamente, el sistema (5) es equivalente al (3).

3. El sistema (6) es equivalente al (3) sobre un campo de números reales si para toda x, y del campo de definición del sistema (3) se cumple la desigualdad $f_2(x,\ y)\cdot g_2(x,\ y) \geqslant 0$.

4. Si no existen tales pares $(x,\ y)$, con los que simultáneamente se reducen a cero ambos miembros de la segunda ecuación del sistema (3), el sistema (7) es equivalente al (3).

Indiquemos un resultado más que se desprende de los teoremas 1 y 2.

TEOREMA 3. *Si el conjunto de ecuaciones*

$$\left[\begin{array}{l} f_{21}(x,\ y) = g_{21}(x,\ y) \\ f_{22}(x,\ y) = g_{22}(x,\ y) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{2k}(x,\ y) = g_{2k}(x,\ y) \end{array}\right.$$

es equivalente a la ecuación $f_1(x,\ y) = g_1(x,\ y)$ o bien es su corolario, el conjunto de sistemas

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f_1(x,\ y) = g_1(x,\ y) \\ f_{21}(x,\ y) = g_{21}(x,\ y) \end{cases} \\ \begin{cases} f_1(x,\ y) = g_1(x,\ y) \\ f_{22}(x,\ y) = g_{22}(x,\ y) \end{cases} \\ \begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_1(x,\ y) = g_1(x,\ y) \\ f_{2k}(x,\ y) = g_{2k}(x,\ y) \end{cases} \end{array}\right.$$

es equivalente al sistema (3) (o bien es su corolario).

En particular, el corolario del sistema

$$\begin{cases} f_1(x,\ y) = g_1(x,\ y) \\ f_{21}(x,\ y) \cdot f_{22}(x,\ y) \cdot \ldots \cdot f_{2h}(x,\ y) = 0 \end{cases}$$

es el conjunto de sistemas:

$$\begin{cases} f_1(x,\ y) = g_1(x,\ y) \\ f_{21}(x,\ y) = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} f_1(x,\ y) = g_1(x,\ y) \\ f_{22}(x,\ y) = 0 \end{cases}; \quad \ldots; \quad \begin{cases} f_1(x,\ y) = g_1(x,\ y) \\ f_{2h}(x,\ y) = 0. \end{cases}$$

EJEMPLO 1 Resolvamos el sistema

$$\begin{cases} xy - 6 = \dfrac{y^3}{x} \\ xy + 24 = \dfrac{x^3}{y} \end{cases} \qquad (8)$$

sobre un conjunto de números reales.

SOLUCIÓN Multiplicando entre sí las ecuaciones del sistema (8), obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} xy - 6 = \dfrac{y^3}{x} \\ (xy + 24)(xy - 6) = \dfrac{y^3x^3}{xy}, \end{cases} \qquad (9)$$

que es el corolario del inicial. Con ayuda de sencillas transformaciones la segunda ecuación del sistema (9) se reduce a la ecuación $xy = 8$, es decir, al corolario de la segunda ecuación del sistema (9). Entonces, tomando en consideración el teorema 1, el sistema

$$\begin{cases} xy - 6 = \dfrac{y^3}{x} \\ xy = 8 \end{cases} \qquad (10)$$

será el corolario del sistema (9). Sustraigamos ahora la primera ecuación del sistema (10) de la segunda. Obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} xy = 8 \\ 6 = 8 - \dfrac{y^3}{x}, \end{cases}$$

y, a continuación,

$$\begin{cases} xy = 8 \\ \dfrac{y^3}{x} = 2. \end{cases} \qquad (11)$$

A consecuencia del teorema 2, el sistema (11) es el corolario del (10).

Después de multiplicar entre sí las ecuaciones del sistema (11), obtenemos el sistema

$$\begin{cases} xy = 8 \\ y^4 = 16, \end{cases} \qquad (12)$$

que es el corolario del sistema (11). De la segunda ecuación del sistema (12) hallamos $y_1 = 2$, $y_2 = -2$ (nos limitamos a las raíces reales) y de la primera ecuación $x_1 = 4$, $x_2 = -4$, respectivamente.

Así, pues, el sistema (12) tiene las siguientes soluciones: (4; 2) y (—4; —2).

VERIFICACION. Como el sistema (12) es, en fin de cuentas, el corolario del (8), las soluciones halladas del sistema han de verificarse, lo que puede realizarse poniendo las soluciones obtenidas del sistema (12) en el (8). Esta verificación muestra que ambas soluciones del sistema (12) lo son también del (8). Así, pues, las soluciones del sistema (8): (4; 2), (—4; —2).

EJEMPLO 2. Resolvamos el sistema $\begin{cases} xy + xz = -4 \\ yz + yx = -1 \\ zx + zy = -9. \end{cases}$

SOLUCION. Sumando las tres ecuaciones del sistema obtenemos $xy + xz + yz = -7$. Uniendo esta ecuación a las ecuaciones del sistema prefijado, obtenemos un sistema equivalente al dado según el teorema 2:

$$\begin{cases} xy + xz + yz = -7 \\ xy + xz = -4 \\ yz + yx = -1 \\ zx + zy = -9. \end{cases}$$

Sustituyamos la segunda ecuación de este sistema por la diferencia de las dos primeras, la tercera ecuación, por la diferencia de la primera y la tercera, y la cuarta, por la diferencia de la primera y la cuarta y, además, omitimos la primera ecuación. Obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} yz = -3 \\ xz = -6 \\ xy = 2 \end{cases}$$

que, en virtud del teorema 2 y la afirmación 1, es equivalente al dado. Multiplicando entre sí las tres ecuaciones, hallamos: $(xyz)^2 = 36$. Añadiendo ésta a las ecuaciones del anterior sistema, llegamos

al sistema equivalente.

$$\begin{cases}(xyz)^2 = 36\\ yz = -3\\ xz = -6\\ xy = 2\end{cases}$$

(aquí se utiliza de nuevo el teorema 2), al que, a su vez, en virtud del teorema 3, es equivalente el conjunto de sistemas:

$$\begin{cases}xyz = 6\\ yz = -3\\ xz = -6\\ xy = 2\end{cases}; \qquad \begin{cases}xyz = -6\\ yz = -3\\ xz = -6\\ xy = 2.\end{cases}$$

Resolvamos el primer sistema de este conjunto. Dividiendo sucesivamente la primera ecuación del sistema entre la segunda, tercera, cuarta, obtenemos: $x = -2$, $y = -1$, $z = 3$.

De modo análogo, del segundo sistema, hallamos: $x = 2$, $y = 1$, $z = -3$.

De forma que el conjunto de sistemas, igual que el sistema inicial equivalente a él, tiene las siguientes soluciones: $(-2;\ -1;\ 3)$, $(2;\ 1;\ -3)$.

2. Métodos fundamentales para resolver sistemas. Detengámonos en tres métodos fundamentales para resolver sistemas de ecuaciones: 1) transformación lineal del sistema (o bien suma algebraica); 2) sustitución; 3) cambio de variables. El método de la **transformación lineal del sistema** se basa en el siguiente teorema.

TEOREMA 4. *Si* $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix} \neq 0$, *los sistemas*

$$\begin{cases}f_1(x,\ y) = 0\\ f_2(x,\ y) = 0\end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases}a_1f_1(x,\ y) + a_2f_2(x,\ y) = 0\\ b_1f_1(x,\ y) + b_2f_2(x,\ y) = 0\end{cases}$$

son equivalentes.

En particular, si $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = \pm 1$, obtenemos el sistema

$$\begin{cases}f_1(x,\ y) = 0\\ f_1(x,\ y) \pm f_2(x,\ y) = 0,\end{cases}$$

que de acuerdo con la afirmación 1, es equivalente al inicial.

Este teorema se divulga al caso cuando el número de ecuaciones es mayor que dos. P.ej., para tres ecuaciones con tres incógnitas tiene lugar el siguiente teorema.

TEOREMA 4'. *Si* $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$, *los sistemas*

$$\begin{cases} f_1(x,\ y,\ z) = 0 \\ f_2(x,\ y,\ z) = 0 \\ f_3(x,\ y,\ z) = 0 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 = 0 \\ b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 f_3 = 0 \\ c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0 \end{cases}$$

son equivalentes.

El método de sustitución se basa en el siguiente teorema.

TEOREMA 5. *Los sistemas de ecuaciones*

$$\begin{cases} x = F(y) \\ f(x,\ y) = g(x,\ y) \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} x = F(y) \\ f(F(y),\ y) = g(F(y),\ y) \end{cases}$$

son equivalentes.

P.ej., serán equivalentes los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} x = 2y - 5 \\ x^2 + y^2 = 2x + y \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = 2y - 5 \\ (2y - 5)^2 + y^2 = 2(2y - 5) + y. \end{cases}$$

COROLARIO. *Si la ecuación* $\varphi(x, y) = 0$ *es equivalente a la ecuación* $x = F(y)$ *(o a la ecuación* $y = F(x)$*), el sistema*

$$\begin{cases} \varphi(x,\ y) = 0 \\ f(x,\ y) = g(x,\ y) \end{cases}$$

es equivalente al sistema $\begin{cases} x = E(y) \\ f(F(y),\ y) = g(F(y),\ y) \end{cases}$

o bien al sistema $\begin{cases} y = F(x) \\ f(x,\ F(x)) = g(x,\ F(x)). \end{cases}$

P.ej., el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y^2 + x = 2(x - 5) \\ \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y} = x^2 + y^2 \end{cases}$$

es equivalente al siguiente sistema:

$$\begin{cases} x = y^2 + 10 \\ \dfrac{y}{y^2 + 10} + \dfrac{y^2 + 10}{y} = (y^2 + 10)^2 + y^2. \end{cases}$$

Para un sistema de tres ecuaciones con tres variables el correspondiente teorema se enuncia del modo siguiente.

TEOREMA 5'. *El sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = g_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) = g_2(x, y, z) \\ z = F(x, y) \end{cases}$$

es equivalente al siguiente sistema:

$$\begin{cases} f_1(x, y, F(x, y)) = g_1(x, y, F(x, y)) \\ f_2(x, y, F(x, y)) = g_2(x, y, F(x, y)) \\ z = F(x, y). \end{cases}$$

El método de **cambio de variable** consiste en lo siguiente. *Si*

$$\left\| \begin{aligned} &F_1(x, y) = f_1(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)) \ y \\ &F_2(x, y) = f_2(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)), \end{aligned} \right.$$

el sistema

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0, \end{cases}$$

mediante las nuevas variables $\varphi_1(x, y) = u$, $\varphi_2(x, y) = v$ *puede ser escrito en la forma* $\begin{cases} f_1(u, v) = 0 \\ f_2(u, v) = 0 \end{cases}$

Sean $(u_1; v_1)$, $(u_2; v_2)$, . . ., $(u_n; v_n)$ las soluciones del último sistema. Entonces, el problema se reduce a la solución del siguiente conjunto de sistemas:

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y) = u_1 \\ \varphi_2(x, y) = v_1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \varphi_1(x, y) = u_2 \\ \varphi_2(x, y) = v_2 \end{cases}; \ \ldots; \quad \begin{cases} \varphi_1(x, y) = u_n \\ \varphi_2(x, y) = v_n \end{cases}.$$

Las soluciones de este conjunto serán, simultáneamente, las del sistema

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Consideremos algunos ejemplos de empleo de estos métodos al resolver sistemas de ecuaciones.

EJEMPLO 3. Resolvamos el sistema $\begin{cases} x^2 = 13x + 4y \\ y^2 = 4x + 13y. \end{cases}$

SOLUCION. Sustraigamos la segunda ecuación de la primera. Entonces, según el teorema 4, el sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = (13x + 4y) - (4x + 13y) \\ y^2 = 4x + 13y \end{cases}$$

es equivalente al inicial. Analicemos la primera ecuación del sistema obtenido. Tenemos $(x-y)(x+y)=9(x-y)$ y, a continuación, $(x-y)(x+y-9)=0$.

Como resultado, llegamos al siguiente sistema que, según el teorema 1, es equivalente al inicial:

$$\begin{cases} (x-y)(x+y-9)=0 \\ y^2=4x+13y. \end{cases}$$

De acuerdo con el teorema 3 este sistema es equivalente al siguiente conjunto de sistemas:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ y^2=4x+13y \end{cases}; \quad \begin{cases} x+y-9=0 \\ y^2=4x+13y. \end{cases}$$

Resolvamos cada uno de estos sistemas con el método de sustitución. El primer sistema se transforma a la forma $\begin{cases} x=y \\ y^2=4y+13y, \end{cases}$ de donde hallamos: $\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2=17 \\ y_2=17. \end{cases}$

El segundo sistema del conjunto se transforma a la forma

$$\begin{cases} x=9-y \\ y^2=4(9-y)+13y. \end{cases}$$

De la ecuación $y^2=4(9-y)+13y$ hallamos: $y_3=12$, $y_4=$ $=-3$ y, a continuación, de la relación $x=9-y$ obtenemos $x_3=$ $=-3$, $x_4=12$.

En total, hemos hallado cuatro soluciones: (0, 0), (17; 17), (—3; 12), (12; —3).

VERIFICACIÓN. Como durante la resolución del sistema prefijado se han realizado sólo transformaciones equivalentes, las soluciones obtenidas son, aisimismo, las del sistema inicial.

EJEMPLO 4. Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=1 \\ x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9. \end{cases}$$

SOLUCIÓN. Adoptemos el método de sustitución. Tenemos:

$$\begin{cases} x=2-y-z \\ 2(2-y-z)+3y+z=1 \\ (2-y-z)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9 \end{cases}$$

y, seguidamente, $\begin{cases} x=2-y-z \\ y-z=-3 \\ y^2+z^2+yz-3z=0. \end{cases}$

A su vez, las dos últimas ecuaciones del sistema obtenido forman un sistema de dos ecuaciones con dos variables. Resolvamos este sistema según el método de sustitución. Tenemos:

$$\begin{cases} y = z - 3 \\ (z-3)^2 + z^2 + (z-3)z - 3z = 0, \end{cases}$$

es decir, $\begin{cases} y = z - 3 \\ z^2 - 4z + 3 = 0. \end{cases}$

De la última ecuación hallamos: $z_1 = 1$, $z_2 = 3$. De la ecuación $y = z - 3$ obtenemos: $y_1 = -2$, $y_2 = 0$, respectivamente, y de la ecuación $x = 2 - y - z$, hallamos $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

Así, pues, hemos obtenido las siguientes soluciones: $(3; -2; 1)$, $(-1; 0; 3)$.

EJEMPLO 5 Resolvamos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} xy + z^2 = 2 \\ yz + x^2 = 2 \\ zx + y^2 = 2. \end{cases}$

SOLUCION Sustituyamos la primera ecuación del problema por la diferencia de la primera y segunda ecuaciones, la segunda, por la diferencia de la segunda y tercera y no tocamos la tercera. Obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} xy - yz + z^2 - x^2 = 0 \\ yz - xz + x^2 - y^2 = 0 \\ zx + y^2 = 2, \end{cases}$$

es decir, el sistema $\begin{cases} (z-x)(z+x) - y(z-x) = 0 \\ (x-y)(x+y) - z(x-y) = 0 \\ xz + y^2 = 2 \end{cases}$

que, en virtud del teorema 4, es equivalente al inicial. Después, tenemos:

$$\begin{cases} (z-x)(z+x-y) = 0 \\ (x-y)(x+y-z) = 0 \\ xz + y^2 = 2. \end{cases}$$

De acuerdo con el teorema 3, a este sistema es equivalente el siguiente conjunto de sistemas:

$$\begin{cases} z - x = 0 \\ x - y = 0 \\ xz + y^2 = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} z - x = 0 \\ x + y - z = 0; \\ xz + y^2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} z + x - y = 0 \\ x - y = 0 \\ xz + y^2 = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} z + x - y = 0 \\ x + y - z = 0 \\ xz + y^2 = 2. \end{cases}$$

Resolvamos los sistemas de este conjunto con el método de sustitución. Del primer sistema hallamos: $(1; 1; 1)$, $(-1; -1; -1)$;

del segundo: $(\sqrt{2}; 0; \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}; 0; -\sqrt{2})$;
del tercero: $(\sqrt{2}; \sqrt{2}; 0)$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$;
del cuarto: $(0; \sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(0; -\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

VERIFICACION. En el proceso de la resolución todas las transformaciones fueron equivalentes, por lo que las ocho soluciones halladas son, asimismo, las del sistema dado de ecuaciones.

3. Sistemas homogéneos. Un sistema de dos ecuaciones con dos variables del tipo

$$\begin{cases} a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = c \\ b_0x^n + b_1x^{n-1}y + b_2x^{n-2}y^2 + \ldots + b_{n-1}xy^{n-1} + b_ny^n = d \end{cases}$$

recibe el nombre de *homogéneo* (los primeros miembros de ambas ecuaciones son polinomios homogéneos de grado n de dos variables). Los sistemas de este tipo se resuelven mediante la combinación de dos métodos: transformación lineal e introducción de nuevas variables.

EJEMPLO 6. Hallemos las raíces reales del sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = -1. \end{cases}$$

SOLUCION. La primera ecuación es homogénea (recordemos que así se denominan las ecuaciones del tipo $f(x, y) = 0$, donde $f(x, y)$ es un polinomio homogéneo). Notemos que al hacer $y = 0$, de la ecuación $3x^2 + xy - 2y^2 = 0$ hallamos $x = 0$. Pero el par $(0, 0)$ no satisface la segunda ecuación del sistema por lo que $y \neq 0$ y, por lo tanto, ambos miembros de la ecuación homogénea $3x^2 + xy - 2y^2 = 0$ se pueden dividir por y^2 (lo que no acarrea la pérdida de raíces).

Obtenemos: $\frac{3x^2}{y^2} + \frac{xy}{y^2} - \frac{2y^2}{y^2} = \frac{0}{y^2}$ y, a continuación, $3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 2 = 0$, de donde hallamos que $\frac{x}{y} = -1$ o bien $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$, o sea, $x = -y$ o bien $x = \frac{2}{3}y$.

Ahora, el problema se reduce a resolver un conjunto de sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = -y \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = -1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x = \frac{2}{3}y \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = -1 \end{cases}$$

El primero de estos sistemas no es compatible y el segundo tiene dos raíces: (2; 3), (—2; —3). Estas serán las raíces del sistema dado.

EJEMPLO 7. Resolvamos el sistema $\begin{cases} 3x^2-8xy+4y^2=0 \\ 5x^2-7xy-6y^2=0. \end{cases}$

SOLUCIÓN Ante todo hemos de señalar que en nuestro caso el par (0; 0) satisface el sistema. Sea, más adelante, $y \neq 0$. Dividiendo por y^2 ambos miembros de cada una de las ecuaciones homogéneas de segundo grado, que forman el sistema prefijado, obtenemos

$$\begin{cases} 3\left(\frac{x}{y}\right)^2-8\left(\frac{x}{y}\right)+4=0 \\ 5\left(\frac{x}{y}\right)^2-7\left(\frac{x}{y}\right)-6=0, \end{cases}$$

de donde hallamos $\begin{cases} \frac{x}{y}=2; \quad \frac{x}{y}=\frac{2}{3} \\ \frac{x}{y}=2; \quad \frac{x}{y}=-\frac{3}{5}. \end{cases}$

Es decir, $\frac{x}{y}=2$.

Haciendo $y=t$, entonces $x=2t$. Señalemos que con $t=0$ y $x=0$, tambien $y=0$. Así, pues, las raíces del sistema dado es un par de la forma $(2t;\ t)$, donde $t \in R$.

EJEMPLO 8 Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x^2-2xy=160 \\ x^2-3xy-2y^2=0. \end{cases} \tag{13}$$

SOLUCIÓN Multipliquemos ambos miembros de la segunda ecuación por 20 y sustraigamos la ecuación obtenida de la primera ecuación del sistema:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 3x^2-\ 2xy\qquad\quad =160 \\ 20x^2-60xy-40y^2=160 \end{array} \\ \hline -17x^2+58xy+40y^2=0 \end{array}.$$

Hemos obtenido el siguiente sistema equivalente al (13):

$$\begin{cases} 3x^2-2xy=160 \\ 17x^2-58xy-40y^2=0. \end{cases} \tag{14}$$

Examinemos la ecuación homogénea

$$17x^2-58xy-40y^2=0. \tag{15}$$

Si $y=0$, de esta ecuación hallamos $x=0$. Pero el par (0; 0) no satisface el sistema inicial. Es decir, $y \neq 0$ y, por esta razón, di-

vidiendo ambos miembros de la ecuación (15) por y^2 obtenemos una ecuación equivalente a ella:

$$17\left(\frac{x}{y}\right)^2-58\left(\frac{x}{y}\right)-40=0.$$

Hagamos $u=\frac{x}{y}$ y llegaremos a la ecuación cuadrática

$$17u^2-58u-40=0,$$

cuyas raíces $u_1=4$, $u_2=-\frac{10}{17}$. Esto significa que la ecuación (15) es equivalente al conjunto de ecuaciones: $\frac{x}{y}=4$; $\frac{x}{y}=-\frac{10}{17}$ y, correspondientemente, el sistema (14) es equivalente al conjunto de sistemas:

$$\begin{cases}\frac{x}{y}=4\\ 3x^2-2xy=160\end{cases};\qquad \begin{cases}\frac{x}{y}=-\frac{10}{17}\\ 3x^2-2xy=160.\end{cases}$$

Aplicando a cada uno de estos sistemas el método de sustitución, hallamos las siguientes raíces: (8; 2); (−8; −2), $\left(5;-\frac{17}{2}\right)$, $\left(-5;\frac{17}{2}\right)$.

Como al resolver el sistema dado sólo se realizaron transformaciones equivalentes, las raíces halladas son también las del sistema inicial.

EJEMPLO 9. Hallemos las raíces reales del sistema

$$\begin{cases}x^3+y^3=1\\ x^3y+2xy^2+y^2=2.\end{cases}\qquad(16)$$

SOLUCIÓN. Realicemos la suma algebraica de las ecuaciones del sistema (16):

$$\begin{array}{r|l} -\;x^3+y^3=1 & \cdot 2\\ x^2y+2xy^2+y^3=2 & \cdot(-1)\\ \hline 2x^3-x^2y-2xy^2+y^3=0. & \end{array}$$

Obtenemos el sistema:

$$\begin{cases}2x^3-x^2y-2xy^2+y^3=0\\ x^3+y^3=1,\end{cases}\qquad(17)$$

equivalente al inicial.

Analicemos la ecuación $2x^3+x^2y-2xy^2+y^3=0$.

Como en el anterior ejemplo, aquí sería posible dividir ambos miembros por y^2. Pero, en este caso es más fácil de descomponer el primer miembro en factores:

$$x^2(2x - y) - y^2(2x - y) = 0$$

y, seguidamente,

$$(2x - y)(x - y)(x + y) = 0.$$

Es decir, el sistema (17) es equivalente al siguiente conjunto:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^3 + y^3 = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x^3 + y^3 = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ x^3 + y^3 = 1. \end{cases}$$

Empleando el método de sustitución respecto a cada uno de estos sistemas hallamos las siguientes raíces del sistema (16): $\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3}; \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}; \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$.

EJEMPLO 10 Hallemos las raíces reales del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases} \qquad (18)$$

SOLUCION Este sistema no es homogéneo, pero puede ser reducido a él. Para ello es suficiente elevar al cuadrado ambos miembros de la segunda ecuación.

Obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ (x^2 - xy + y^2)^2 = 49 \end{cases}$$

que es el corolario del inicial. Después, tenemos:

$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 - 2x^3y + 2x^2y^2 - 2xy^3 = 49. \end{cases}$$

Sustituyamos la segunda ecuación de este sistema por la diferencia de la primera y segunda ecuaciones:

$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ x^3y - x^2y^2 + xy^3 = 21. \end{cases} \qquad (19)$$

Para resolver este sistema homogéneo apliquemos el método de la suma algebraica:

$$-\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 & \Big| \cdot 3 \\ x^3y - x^2y^2 + xy^3 = 21 & \Big| \cdot 13 \end{cases}$$
$$\overline{3x^4 - 13x^3y + 16x^2y^2 - 13xy^3 + 3y^4 = 0.} \qquad (20)$$

Si $y = 0$, entonces $x = 0$. Pero el par (0; 0) no satisface el sistema (18). Si $y \neq 0$, la división de ambos miembros de la ecuación (20) por y^4 conduce a la ecuación

$$3\left(\frac{x}{y}\right)^4 - 13\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 16\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 13\left(\frac{x}{y}\right) + 3 = 0,$$

que es equivalente a la (20).

Haciendo $u = \frac{x}{y}$, obtenemos la ecuación

$$3u^4 - 13u^3 + 16u^2 - 13u + 3 = 0.$$

Dividamos ambos miembros de esta ecuación por u^2:

$$3u^2 - 13u + 16 - \frac{13}{u} + \frac{3}{u^2} = 0$$

y, a continuación, $3\left(u^2 + \frac{1}{u^2}\right) - 13\left(u + \frac{1}{u}\right) + 16 = 0$.

Hagamos $v = u + \frac{1}{u}$, entonces $u^2 + \frac{1}{u^2} = v^2 - 2$ y tendremos:

$3(v^2 - 2) - 13v + 16 = 0$ o bien $3v^2 - 13v + 10 = 0$.

de donde $v_1 = 1$, $v_2 = \frac{10}{3}$.

Resolvamos ahora el conjunto de ecuaciones: $u + \frac{1}{u} = 1$; $u + \frac{1}{u} = \frac{10}{3}$.

La primera ecuación del conjunto no tiene raíces reales; de la segunda hallamos: $u_1 = 3$, $u_2 = \frac{1}{3}$. Así, pues, la ecuación (20) es equivalente al conjunto de ecuaciones: $\frac{x}{y} = 3$; $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$, mientras que el sistema (19) es, correspondientemente, equivalente al conjunto de sistemas:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{y} = 3\\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91\end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{l}\frac{x}{y} = \frac{1}{3}\\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91.\end{array}\right. \qquad (21)$$

Este conjunto tiene las raíces: (3; 1), (1; 3), (—3; —1), (—1; —3).

VERIFICACIÓN. Al resolver el ejemplo, todas las transformaciones, salvo la primera, conducían a sistemas equivalentes. Realizando la sustitución de las raíces halladas en el sistema (18), nos cercioramos de que las cuatro raíces del conjunto (21) son también las de él.

4. **Sistemas simétricos.** Recordemos los datos fundamentales acerca de las expresiones simétricas. La expresión $F(x, y)$ recibe el nombre de *simétrica* si al sustituir la variable x por y, y por x ella no varía. P.ej., las siguientes expresiones son simétricas:

$$F(x, y) = x^2 + 3xy + y^2, \quad F(x, y) = \sqrt{x+y} + 2xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Los fundamentales polinomios simétricos de dos variables se consideran $x + y$ y xy. Todos los demás polinomios simétricos de dos variables pueden ser expresados con los fundamentales. Haciendo, para abreviar, $u = x + y$, $v = xy$, obtenemos, p.ej.:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v,$$
$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = u(u^2 - 3v) = u^3 - 3uv,$$
$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2 =$$
$$= u^4 - 4u^2v + 2v^2,$$
$$x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y) =$$
$$= (u^2 - 2v)(u^3 - 3uv) - v^2u = u^5 - 5u^3v + 5uv^2,$$
$$x^2 + xy + y^2 = (x^2 + 2xy + y^2) - xy = u^2 - v, \quad \text{etc.}$$

Un sistema, en el que todas las ecuaciones son simétricas, lleva el nombre de *simétrico*. Puede ser resuelto según el método de cambio de variables, tomando como nuevas variables los polinomios simétricos fundamentales.

EJEMPLO 11 Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$$

SOLUCIÓN. Hagamos $\begin{cases} x + y = u \\ xy = v. \end{cases}$ Como $x^3 + y^3 = u^3 - 3uv$, el sistema prefijado se reduce al siguiente:

$$\begin{cases} u^3 - 3uv + v^3 = 17 \\ u + v = 5. \end{cases}$$

De este sistema, obtenemos:

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ v_1 = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} u_2 = 2 \\ v_2 = 3. \end{cases}$$

Ahora nos queda resolver el siguiente conjunto de sistemas:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 3. \end{cases}$$

Las soluciones de este conjunto y, con él, del sistema inicial, son las siguientes: $(1; 2)$, $(2; 1)$, $(1 + i\sqrt{2}; 1 - i\sqrt{2})$, $(1 - i\sqrt{2}; 1 + i\sqrt{2})$.

OBSERVACIÓN. Retornemos de nuevo al sistema estudiado en el ejemplo 10 (véase la pág 78):

$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

Este sistema es simétrico y, por lo tanto, como el anterior puede ser transformado a una forma más sencilla introduciendo nuevas variables:

$$\begin{cases} x+y=u \\ xy=v. \end{cases}$$

Obtenemos: $\begin{cases} ((u^2-2v)^2-2v^2)+v^2=91 \\ (u^2-2v)-v=7 \end{cases}$

y, a continuación $\begin{cases} (u^2-2v)^2-v^2=91 \\ u^2-3v=7. \end{cases}$

De la segunda ecuación de este sistema, hallamos: $u^2 = 3v + 7$ Con ayuda de esta sustitución la primera ecuación del sistema se transforma a la forma: $(3v + 7 - 2v)^2 - v^2 = 91$, de donde obtenemos: $v = 3$.

De la ecuación $u^2 = 3v + 7$ hallamos $u_{1,2} = \pm 4$. Así, pues, el sistema tiene dos soluciones:

$$\begin{cases} u_1=4 \\ v_1=3 \end{cases}; \qquad \begin{cases} u_2=-4 \\ v_2=3. \end{cases}$$

Por lo tanto, el sistema inicial es equivalente al conjunto de sistemas:

$$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x+y=-4 \\ xy=3. \end{cases}$$

Este conjunto conduce a las mismas soluciones que obtuvimos en el ejemplo 10.

EJERCICIOS

Resuelvan los siguientes sistemas de ecuaciones:

418. $\begin{cases} x^2+y^2+6x+2y=0 \\ x+y+8=0. \end{cases}$

419. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=41. \end{cases}$ 420. $\begin{cases} 2x^2-3y=23 \\ 3y^2-8x=59. \end{cases}$

421. $\begin{cases} 5x^2+14y=19 \\ 7y^2+10x=17. \end{cases}$ 422. $\begin{cases} x^2(x+y)=80 \\ x^2(2x-3y)=80. \end{cases}$

423. $\begin{cases} x-y=2 \\ x^3-y^3=8. \end{cases}$ 424. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y-z=2 \\ x+yz+zx=3. \end{cases}$

425. $\begin{cases} x^2+3y^2-xz=6 \\ 2x-y+3z=11 \\ x+2y-2z=1. \end{cases}$ 426. $\begin{cases} 9x^2+y^2=13 \\ xy=2. \end{cases}$

427. $\begin{cases} x^2+y^2-2x+3y-9=0 \\ 2x^2+2y^2+x-5y-1=0. \end{cases}$

428. $\begin{cases} x^2-xy-y^2+x-2y=-2 \\ 3xy-5y^2+3x-6y=-5. \end{cases}$ 429. $\begin{cases} x+yz=2 \\ y+zx=2 \\ z+xy=2. \end{cases}$

430. $\begin{cases} x-y=\frac{1}{4}xy \\ x^2+y^2=\frac{5}{2}xy. \end{cases}$ 431. $\begin{cases} \frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}=2 \\ \frac{3}{x+y}+\frac{4}{x-y}=7. \end{cases}$

432. $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y}+\dfrac{4}{x-y}=3 \\ (x+y)^2+(x-y)^2=20. \end{cases}$ 433. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{5}{2} \\ x^2+y^2=20. \end{cases}$

434. $\begin{cases} (x+y)^2+2x=35-2y \\ (x-y)^2-2y=3-2x \end{cases}$ 435. $\begin{cases} 12(x+y)^2+x=2{,}5-y \\ 6(x-y)^2+x=0{,}125+y. \end{cases}$

436. $\begin{cases} y^2(x^2-3)+xy+1=0 \\ y^2(3x^2-6)+xy+2=0. \end{cases}$

437. $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+y^2-1}+\dfrac{2y}{x}=1 \\ x^2+y^2+\dfrac{4x}{y}=22. \end{cases}$ 438. $\begin{cases} 6x^2+xy-2y^2=0 \\ 3x^2-xy-2y^2=0. \end{cases}$

439. $\begin{cases} 56x^2-xy-y^2=0 \\ 14x^2+19xy-3y^2=0. \end{cases}$ 440. $\begin{cases} 4x^2-3xy-y^2=0 \\ 32x^2-36xy+9y^2=6. \end{cases}$

441. $\begin{cases} 15x^2+xy-2y^2=0 \\ 7x^2-4xy-3y^2=-32. \end{cases}$ 442. $\begin{cases} x^2+xy+4y^2=6 \\ 3x^2+8y^2=14. \end{cases}$

443. $\begin{cases} x^2-3xy+y^2=-1 \\ 3x^2-xy+3y^2=13. \end{cases}$ 444. $\begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=29 \\ 7x^2-8xy+7y^2=43. \end{cases}$

445. $\begin{cases} x^3+y^3=35 \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$

446. $\begin{cases} x^3-y^3=19(x-y) \\ x^3+y^3=7(x+y). \end{cases}$ 447. $\begin{cases} x^4-y^4=15 \\ x^3y-xy^3=6. \end{cases}$

448. $\begin{cases} x^4+6x^2y^2+y^4=136 \\ x^3y+xy^3=30 \end{cases}$ (limítense a buscar las soluciones reales).

449. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=19(x-y)^2 \\ x^2-xy+y^2=7(x-y). \end{cases}$

450. $\begin{cases} x^2+4xy-2y^2=5(x+y) \\ 5x^2-xy-y^2=7(x+y). \end{cases}$ 451. $\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ x+y+xy=23. \end{cases}$

452. $\begin{cases} x+y+x^2+y^2=18 \\ xy+x^2+y^2=19. \end{cases}$

Hallen las soluciones reales de los sistemas de ecuaciones:

453. $\begin{cases} x^3+y^3=19 \\ (xy+8)(x+y)=2. \end{cases}$

454. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$ 455. $\begin{cases} xy(x+y)=20 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{4}. \end{cases}$

456. $\begin{cases} x^2+y^2=7+xy \\ x^3+y^3=6xy-1. \end{cases}$ 457. $\begin{cases} x+y=5 \\ x^4+y^4=97. \end{cases}$

458. $\begin{cases} x^4-x^2y^2+y^4=601 \\ x^2-xy+y^2=21. \end{cases}$ 459. $\begin{cases} x^5+y^5=33 \\ x+y=3. \end{cases}$

460. $\begin{cases} x^3y+xy^3=\dfrac{10}{9}(x+y)^2 \\ x^4y+xy^4=\dfrac{2}{3}(x+y)^3. \end{cases}$ 461. $\begin{cases} \dfrac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\dfrac{31}{7} \\ x^2+xy+y^2=3. \end{cases}$

462. $\begin{cases} x^3-y^3=26 \\ x^4-y^4=20(x+y). \end{cases}$

463. $\begin{cases} x^2-yz=3 \\ y^2-zx=5 \\ z^2-xy=-1. \end{cases}$ 464. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ y^2+yz+z^2=3 \\ z^2+zx+x^2=1. \end{cases}$

465. $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=9+yz \\ x^2+2y^2+z^2=6+zx \\ x^2+y^2+2z^2=3+xy. \end{cases}$

466. $\begin{cases} x^2y=x+y-z \\ z^2x=x-y+z \\ y^2z=y-x+z. \end{cases}$ 467. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x(y+z)=5 \\ y(x+z)=8. \end{cases}$

468. $\begin{cases} x-y+z=6 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ x^3-y^3+z^3=36. \end{cases}$ 469. $\begin{cases} y+z=xyz \\ z+x=xyz \\ x+y=xyz. \end{cases}$

470. $\begin{cases} \dfrac{yz}{x}=\dfrac{10}{3} \\ \dfrac{zx}{y}=\dfrac{15}{2} \\ \dfrac{xy}{z}=\dfrac{6}{5} \end{cases}$ 471. $\begin{cases} x+y+z=13 \\ x^2+y^2+z^2=91 \\ y^2=xz. \end{cases}$

472. $\begin{cases} 2x+y+z=6 \\ 3x+2y+z=7 \\ (x-1)^3+(y+2)^3+(z-3)^3=7. \end{cases}$

473. $\begin{cases} \dfrac{3xy}{x+y}=2 \\ \dfrac{4xz}{x+z}=3 \\ \dfrac{5yz}{y+z}=6. \end{cases}$ 474. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=3 \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}=3 \\ x+y+z=3. \end{cases}$ 475. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3 \\ \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}=3 \\ \dfrac{1}{xyz}=1 \end{cases}$

476. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{2} \\ x+y+z=\dfrac{7}{2} \\ xyz=1. \end{cases}$ 477. $\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ xy+yz+zx=47 \\ (z-x)(z-y)=2 \end{cases}$

478. $\begin{cases} x+y=3z \\ x^2+y^2=5z \\ x^3+y^3=9z. \end{cases}$ 479. $\begin{cases} x-z=y^2 \\ x^2-z^2=3y^4 \\ y^3+3y+x+z=26. \end{cases}$

§ 11. Problemas para la composición de ecuaciones y sistemas de ecuaciones

La resolución de problemas escritos que se resuelven confeccionando ecuaciones, por regla, se lleva a cabo en cuatro etapas: 1) designando con las letras x, y, z, . . . las variables incógnitas, de las que se trata en el problema; 2) con ayuda de las variables introducidas y las variables conocidas del planteamiento del problema, confeccionar el sistema de ecuaciones (o de una sola ecuación); 3) reso-

lución del sistema obtenido de ecuaciones (o de una ecuación); 4) elección de las soluciones de acuerdo con el sentido del problema.

1. Problemas sobre dependencias numéricas. Para resolver tales problemas se utilizan los siguientes factores:

1. Si al número natural x se le adjunta a la derecha el número de n cifras y, como resultado obtenemos el número $10^n x + y$.

2. Si a y b son números naturales, con la particularidad de que $a > b$ y que a no es múltiplo de b, existe un par, y sólo uno, de tales números naturales q y r que $a = bq + r$, donde $r < b$ (a es el divisor, b, el dividendo, q, el cociente, r, el resto).

EJEMPLO 1. Hallemos un número de dos cifras si sabemos que la cifra de sus unidades es 2 veces mayor que la cifra de las decenas y que el producto del número buscado por la suma de sus cifras es igual a 144.

SOLUCIÓN. Sea x la cifra de las decenas, y, la de las unidades del número buscado. Entonces, el propio número tiene la forma $10x + y$. Del planteamiento del problema se deduce: primero, que $y - x = 2$ y, segundo, que $(10x + y)(x + y) = 144$.

Como resultado llegamos al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y - x = 2 \\ (10x + y)(x + y) = 144. \end{cases}$$

Este sistema tiene dos soluciones: (2; 4) y $\left(-3\frac{2}{11}; -1\frac{2}{11}\right)$.

El segundo par no satisface el planteamiento del problema. Por lo tanto, el número buscado es igual a 24.

EJEMPLO 2. Hallemos dos números de dos cifras A y B sobre los que sabemos lo siguiente. Si al número A se adjunta a la derecha el número B y, a continuación, la cifra 0, el número de cinco cifras obtenido se divide por el cuadrado del número B, en el cociente obtendremos 39 y en el resto, 575. Si al número A se adjunta a la derecha el número B y del número de cuatro cifras obtenido se resta el número de cuatro cifras que se forma si el número B se adjunta al número A, obtendremos 1287.

SOLUCIÓN. Al adjuntar 0 a la derecha del número B, obtenemos el número $10B$. Añadiendo este número de tres cifras al número A, obtenemos $1000A + 10B$.

De acuerdo con el planteamiento del problema el número de cinco cifras $1000A + 10B$ es el dividendo, B^2, el divisor, 39, el cociente, 575, el resto, es decir, $1000A + 10B = 39B^2 + 575$.

A continuación, si a la derecha del número A ponemos el número B (de dos cifras), obtenemos $100A + B$. Si a la derecha del número B adjuntamos el número A (de dos cifras), hallamos $100B + A$. Según el planteamiento $(100A + B) - (100B + A) = 1287$.

Como resultado llegamos al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 1000A + 10B = 39B^2 + 575 \\ (100A + B) - (100B + A) = 1287, \end{cases}$$

que, después de resolverlo, nos permite hallar $\begin{cases} A_1 = 48 \\ B_1 = 35 \end{cases}$; $\begin{cases} A_2 = \frac{152}{39} \\ B_2 = -\frac{355}{39}. \end{cases}$

Está claro que el segundo par no satisface las condiciones del problema. Los números buscados son 48 y 35.

2. Problemas sobre progresiones. La sucesión numérica (a_n) recibe el nombre de *progresión aritmética* si existe un número tal d que para toda $n \in N$ se cumple la igualdad $a_{n+1} = a_n + d$; el número d lleva el nombre de *razón (diferencia) de la progresión aritmética.* La sucesión (b_n) en la que $b_1 \neq 0$ se denomina *progresión geométrica* si hay un número $q \neq 0$ tal que para toda $n \in N$ se cumple la igualdad $b_{n+1} = b_n \cdot q$; el número q recibe el nombre de *razón de la progresión geométrica.*

Propiedades fundamentales de la progresión aritmética:

1) $a_n = a_1 + d(n - 1)$.

2) $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, *donde* $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

3) *La sucesión* (a_n) *es una progresión aritmética cuando y sólo cuando para toda* $n \in N$ *se cumple la igualdad* $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$ *(propiedad característica de la progresión aritmética).*

Propiedades fundamentales de la progresión geométrica:

1) $b_n = b_1 q^{n-1}$.

2) $S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$, donde $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, $q \neq 1$.

3) *La sucesión* (b_n) *es una progresión geométrica cuando y sólo cuando para toda* $n \in N$ *se cumple la igualdad* $|b_{n+1}| = \sqrt{b_n \cdot b_{n+2}}$ *(propiedad característica de la progresión geométrica).*

En la práctica, en lugar de la igualdad $|b_{n+1}| = \sqrt{b_n \cdot b_{n+2}}$ es más cómodo hacer uso de la igualdad $b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}$, equivalente a la primera.

4) *Si la progresión geométrica es infinitamente decreciente,* es decir, $|q| < 1$, *entonces* $S = \frac{b_1}{1 - q}$, *donde* $S = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Los problemas sobre dependencias numéricas ligados con progresiones, por regla, se reducen a la solución de sistemas de ecuaciones.

EJEMPLO 3 Hallemos el tercer término de una progresión geométrica infinitamente decreciente si sabemos que su suma es igual a 9, y la suma de los cuadrados de todos sus términos es igual a 40,5.

SOLUCIÓN. Según el planteamiento $S=9$, es decir, $\frac{b_1}{1-q}=9$. Analicemos la serie $b_1^2, b_2^2, b_3^2, \ldots, b_n^2, \ldots$. De acuerdo con el planteamiento su suma es igual a 40,5. Senalemos que los términos de la serie forman una progresión geométrica con el primer término b_1^2 y la razón q^2, lo que significa que la suma de dicha progresión es igual a $\frac{b_1^2}{1-q^2}$. Como resultado, es posible escribir el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \frac{b_1}{1-q}=9 \\ \frac{b_1^2}{1-q^2}=40,5 \end{cases}$, que al resolverlo nos proporciona: $b_1=6$, $q=\frac{1}{3}$. Así, pues, $b_5=b_1\cdot q^4=6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{2}{27}$.

EJEMPLO 4 Tres números forman una progresión geométrica. Si del tercer número restamos 4, los números forman una progresión aritmética. Si de los términos segundo y tercero de la progresión aritmética obtenida restamos de cada uno de ellos la unidad, de nuevo obtenemos una progresión geométrica. Hallemos esos números.

SOLUCIÓN Sean x, y, z los números buscados. Como ellos forman una progresión geométrica (con mayor precisión, son términos sucesivos de una progresión geométrica), haciendo uso de su propiedad característica, obtenemos $y^2 = xz$. Seguidamente, como los números x, y, $(z-4)$ forman una progresión aritmética, aplicando su propiedad característica, hallamos $y=\frac{x+(z-4)}{2}$. Por fin, ya que los números x, $(y-1)$, $(z-5)$ forman una progresión geométrica, entonces $(y-1)^2 = x(z-5)$.

Como resultado, llegamos al sistema de ecuaciones

$\begin{cases} y^2=xz \\ x+z-4=2y \\ (y-1)^2=x(z-5), \end{cases}$ que al ser resuelto nos proporciona: (1; 3; 9), $\left(\frac{1}{9};\ \frac{7}{9};\ \frac{49}{9}\right)$.

Estos valores de x, y, z satisfacen las condiciones del problema. Así, pues, los números buscados son: 1, 3 y 9 ó bien $\frac{1}{9}$, $\frac{7}{9}$ y $\frac{49}{9}$.

EJEMPLO 5 Hallemos un número de tres cifras, cuyas cifras forman una progresion aritmética y que se divide por 45.

SOLUCION. Sea x la cifra de las centenas, y, de las decenas y z, de las unidades del número buscado. Como los números x, y, z forman una progresión aritmética, $y=\frac{x+z}{2}$.

Según el planteamiento el número buscado se divide por 45, es decir, por 5 y por 9. O sea, el número acaba con la cifra 0 ó la 5, mientras que la suma de las cifras del número buscado se divide por 9. Como resultado, llegamos al conjunto de dos sistemas:

$$\begin{cases} z=0 \\ y=\frac{x+z}{2} \\ x+y+z=9k \end{cases} ; \qquad \begin{cases} z=5 \\ y=\frac{x+z}{2} \\ y+x+z=9k. \end{cases}$$

Del primer sistema hallamos $\begin{cases} x=2y \\ x+y=9k. \end{cases}$

Tomando para y todos los valores posibles desde 1 hasta 9, nos cercioramos que el último sistema sólo se satisface con el par (6; 3).

Del segundo sistema hallamos $\begin{cases} 2y=x+5 \\ x+y+5=9k. \end{cases}$

De forma análoga, tomando para y todos los valores posibles desde 1 hasta 9, nos cercioramos que dicho sistema sólo se satisface con los pares (1; 3) y (7; 6).

Así, pues, las condiciones del problema se satisfacen con tres números: 630, 135, 765.

3. **Problemas sobre el movimiento.** Al resolver tales problemas se adoptan las siguientes suposiciones:

1. Si no hay indicaciones especiales, el movimiento se considera uniforme.

2. La velocidad se considera magnitud positiva.

3. Los giros de los cuerpos en movimiento, las transiciones a nuevos regímenes de movimiento se considera que transcurren instantáneamente.

4. Si el cuerpo a la velocidad propia x se desplaza por un río, la velocidad de cuya corriente es y, la velocidad del cuerpo a favor de la corriente se considera igual a $(x+y)$, mientras que contra corriente, $(x-y)$.

EJEMPLO 6. A un río desemboca un afluente. Una lancha sale del punto A, situado en el afluente, va por la corriente 80 km hasta la desembocadura del afluente al río en el punto B y, a continuación, va corriente arriba por el río hasta el punto C. El recorrido desde A hasta C fue cubierto en el transcurso de 18 h, el recorrido inverso, en 15 h. Hallemos la distancia desde el punto A hasta el C si sabemos que la velocidad de la corriente del río es 3 km/h y la propia velocidad de la lancha, 18 km/h.

SOLUCIÓN Sea x km/h la velocidad del afluente. Entonces, desde el punto A hasta el punto B la lancha va a una velocidad $(18+x)$ km/h, mientras que desde el punto B hasta el punto A, a una velocidad $(18-x)$ km/h, consumiendo en el recorrido desde A hasta B $\frac{80}{18+x}$ h y en el recorrido desde B hasta A, $\frac{80}{18-x}$ h.

Sea y km la distancia desde B hasta C. Desplazándose del punto B al punto C la lancha se mueve a una velocidad de 15 km/h, en tanto que del punto C al punto B a una velocidad de 21 km/h, cubriendo el camino de B a C en el transcurso de $\frac{y}{15}$ h, mientras que el recorrido inverso de C a B, $\frac{y}{21}$ h. Para todo el recorrido de A a C la lancha consume $\left(\frac{80}{18+x}+\frac{y}{15}\right)$ h, lo que según el planteamiento del problema constituye 18 h y para el recorrido inverso, $\left(\frac{80}{18-x}+\frac{y}{21}\right)$ h, lo que según el planteamiento del problema constituye 15 h.

Escribamos el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{80}{18+x}+\frac{y}{15}=18\\ \frac{80}{18-x}+\frac{y}{21}=15,\end{array}\right.$$

que se resuelve sin dificultad con el método de sustitución (p.ej., es posible expresar y con x de la primera ecuación). Hallamos $x=2$, $y=210$.

Como la distancia de A a C es igual a la suma de las distancias de A a B (80 km) y de B a C (210 km), todo el recorrido de A a C es igual a 290 km.

EJEMPLO 7 Del punto A al punto B salió un camión. Una hora después de A a B salió un turismo. Al punto B los dos automóviles llegaron al mismo tiempo. Si de los puntos A y B ellos hubieran salido simultáneamente al encuentro, se encontrarían después de 1 h 12 min de su partida. ¿Cuánto tiempo tarda en cubrir el camión la distancia entre A y B?

SOLUCIÓN Sean x km/h la velocidad del camión e y km/h, la del turismo, z km, la distancia de A a B. Entonces, el camión en $\frac{z}{x}$ h cubre el recorrido entre A y B y el turismo, esa misma distancia, la cubre en $\frac{z}{y}$ h. Del planteamiento del problema se desprende que $\frac{z}{x}-\frac{z}{y}=1$. Los automóviles, desplazándose al encuentro, están en camino hasta encontrarse $\frac{z}{x+y}$ h, lo que, de acuerdo con las

condiciones del problema, constituye 1 h 12 min, o sea, $\frac{6}{5}$ h. Como resultado, escribimos un sistema de dos ecuaciones con tres variables:

$$\begin{cases} \frac{z}{x}-\frac{z}{y}=1 \\ \frac{z}{x+y}=\frac{6}{5}. \end{cases} \quad (1)$$

Aunque el número de incógnitas es mayor que el de ecuaciones, el problema puede ser resuelto, ya que no es preciso hallar los valores de cada una de las variables x, y, z, sino la razón $\frac{z}{x}$ (tiempo de desplazamiento del camión). Transformemos la segunda ecuación del sistema a la forma: $5z = 6x + 6y$ y, seguidamente, escribimos: $5 = 6\cdot\frac{x}{z} + 6\cdot\frac{y}{z}$.

Haciendo $u=\frac{z}{x}$, $v=\frac{z}{y}$, reescribimos el sistema (1):

$$\begin{cases} u-v=1, \\ \frac{6}{u}+\frac{6}{v}=5, \end{cases}$$

que, al resolverlo, nos proporciona: $u = 3$, $v = 2$. Es decir, el camión cubre el recorrido de A a B en 3 h.

EJEMPLO 8. El recorrido por el que se despaza un ciclista consta de tres sectores, con la particularidad de que la longitud del primero es 6 veces mayor que la del tercero. ¿Cuál será la velocidad media de movimiento del ciclista por todo el recorrido, si sabemos que es igual a la velocidad en el segundo sector, 2 km/h menor que la velocidad en el primer sector y 10 km/h mayor que la mitad de la velocidad de desplazamiento en el tercer sector?

SOLUCIÓN. Sea x km/h la velocidad media del ciclista, y km, la longitud del tercer sector, z km, la longitud del segundo sector.

A — 6y km — z km — y km — B

(x + 2) km/h — x km/h — (2x − 20) km/h

Fig. 1

Entonces, la velocidad del ciclista en el primer sector será $(x+2)$ km/h, en el segundo, x km/h y en el tercero, $(2x - 20)$ km/h $\Big($ya que, según el planteamiento, la velocidad v del ciclista en el tercer sector está ligada con la velocidad media x mediante la fórmula $x = \frac{v}{2} + 10\Big)$. En la fig. 1 se ofrece el esquema de movimiento del

ciclista. El tiempo de movimiento del ciclista de A a B puede ser expresado introduciendo las variables con ayuda de dos procedimientos:

a) sumar el tiempo de movimiento en cada uno de los tres sectores:

$$\left(\frac{6y}{x+2}+\frac{z}{x}+\frac{y}{2x-20}\right) \text{h};$$

b) dividir todo el recorrido por la velocidad media del ciclista: $\frac{7y+z}{x}$ h.

Como resultado, escribimos la ecuación:

$$\frac{6y}{x+2}+\frac{z}{x}+\frac{y}{2x-20}=\frac{7y+z}{x}. \qquad (2)$$

Transformamos la ecuación (2) a la forma

$$\frac{6y}{x+2}+\frac{y}{2x-20}=\frac{7y+z}{x}-\frac{z}{x}$$

y, a continuación,

$$\frac{6y}{x+2}+\frac{y}{2x-20}=\frac{7y}{x}.$$

Dividiendo ambos miembros de la última ecuación por y (lo que no conducirá a la pérdida de soluciones, ya que se comprende que $y \neq 0$), obtenemos

$$\frac{6}{x+2}+\frac{1}{2x-20}=\frac{7}{x},$$

de donde hallamos $x_1 = 14$, $x_2 = -20$. La segunda raíz no satisface las condiciones del problema. O sea, la velocidad media del ciclista es de 14 km/h.

OBSERVACIÓN. La ecuación (2) contiene tres variables, pero durante las transformaciones dos de ellas, y y z (el valor de las cuales no era necesario hallar) se eliminaron. Semejantes variables reciben el nombre de *auxiliares*.

Antes de pasar al siguiente ejemplo señalemos que, convencionalmente, podemos considerar como problemas sobre el movimiento aquellos en los que se realiza cierto trabajo (p.ej., se rectifica cierta cantidad de piezas, se llena un depósito, etc.). En los problemas de este tipo el valor de todo el trabajo (número de piezas, volumen del depósito, etc.) desempeña el papel de distancia, mientras que el rendimiento del trabajo (es decir, el valor del trabajo realizado por unidad de tiempo) juega el papel de velocidad.

EJEMPLO 9. Por dos tubos de diferente diámetro llega el agua a un depósito. El primer día, los dos tubos, funcionando simultáneamente, alimentaron 14 m^3 de agua. El segundo día sólo estuvo conec-

tado el tubo pequeño. Él alimentó 14 m³ de agua funcionando 5 h más que el primer día. El tercer día el trabajo continuó igual tiempo que el segundo, pero, inicialmente funcionaban ambos tubos y alimentaron 21 m³ de agua y, a continuación, sólo funcionaba el tubo grande que alimentó 20 m³ de agua más. ¿Qué cantidad de agua alimenta cada tubo durante 1 h?

SOLUCION. Sea x m³/h el rendimiento del tubo grande, y m³/h, el rendimiento del tubo pequeño, t h, el tiempo durante el que funcionan ambos tubos el primer día. Entonces, el primer día los tubos alimentaron $(x + y)\,t$ m³ de agua, lo que, según el planteamiento, constituye 14 m³. Obtenemos la primera ecuación: $(x + y)\,t = 14$.

En el transcurso del segundo día el tubo pequeño trabajó $(t + 5)$ h y alimentó $y\,(t + 5)$ m³ de agua, lo que corresponde a 14 m³. Obtenemos la segunda ecuación $y\,(t + 5) = 14$. El tercer día comenzaron a trabajar los dos tubos alimentando 21 m³ de agua, o sea, su trabajo conjunto duró $\frac{21}{x+y}$ h. A continuación, trabajó sólo el tubo grande que alimentó 20 m³ de agua, lo que significa que su trabajo duró $\frac{20}{x}$ h. Como el trabajo del tercer día duró el mismo tiempo que durante el segundo, obtenemos la tercera ecuación: $\frac{21}{x+y} + \frac{20}{x} = t + 5$. Hemos llegado al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (x+y)\,t = 14 \\ y\,(t+5) = 14 \\ \dfrac{21}{x+y} + \dfrac{20}{x} = t + 5. \end{cases}$$

De la segunda ecuación del sistema hallamos: $t + 5 = \frac{14}{y}$, entonces, la primera ecuación del sistema se puede reescribir en la forma: $\frac{14}{x+y} = \frac{14}{y} - 5$ y la tercera: $\frac{21}{x+y} + \frac{20}{x} = \frac{14}{y}$.

Obtenemos el sistema de dos ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{14}{x+y} = \dfrac{14}{y} - 5 \\ \dfrac{21}{x+y} + \dfrac{20}{x} = \dfrac{14}{y}. \end{cases}$$

Eliminando en ambas ecuaciones los denominadores, obtenemos:

$$\begin{cases} 5xy + 5y^2 = 14x \\ 14x^2 - 27xy - 20y^2 = 0. \end{cases}$$

La segunda ecuación del sistema es homogénea. Dividiendo ambos miembros de ella, término por término, por y^2 y haciendo $z=\frac{x}{y}$, obtenemos la ecuación cuadrática $14z^2-27z-20=0$, cuyas raíces son $z_1=\frac{5}{2}$, $z_2=-\frac{4}{7}$. La segunda raíz no satisface las condiciones del problema, es decir, $z=\frac{5}{2}$, lo que significa que $\frac{x}{y}=\frac{5}{2}$.

Queda por resolver el sistema $\begin{cases}\frac{x}{y}=\frac{5}{2}\\ 5xy+5y^2=14x\end{cases}$, de donde $x=5$, $y=2$, o sea, el rendimiento del tubo grande es 5 m³/h y del pequeño, 2m³/h.

4. **Problemas sobre el trabajo conjunto.** Por regla, el contenido de semejantes problemas se reduce a lo siguiente. Cierto trabajo, cuyo volumen no se indicó y no es la magnitud buscada (p.ej., la impresión de un manuscrito, la excavación de una fosa, el llenado de un depósito, etc.), es realizado por varias personas o mecanismos que funcionan uniformemente (es decir, con rendimiento constante de cada uno de ellos). En tales problemas el volumen de todo el trabajo, que ha de ser realizado, se toma como la unidad (por unidad de medida).

Si el rendimiento del trabajo, o sea, el valor de la labor realizada por unidad de tiempo, se designa por v y el tiempo necesario para realizar todo el trabajo, por t, entonces $v=\frac{1}{t}$.

EJEMPLO 10 Para arar toda la parcela el primer tractor consume 2 h menos que el tercero y 1 h más que el segundo. Al trabajar simultáneamente los tractores primero y segundo la parcela puede ser arada durante 1 h 12 min. ¿Cuánto tiempo se consumirá para arar la parcela al trabajar en conjunto los tres tractores?

SOLUCION Sea x h el tiempo necesario para arar la parcela con el primer tractor, y h, con el segundo y z h, con el tercero. El volumen del trabajo (en nuestro caso éste es el área de la percela) se toma igual a 1. Entonces, $\frac{1}{x}$ es el rendimiento del primer tractor, $\frac{1}{y}$, del segundo y $\frac{1}{z}$, del tercero. Según el planteamiento del problema $z-x=2$ y $x-y=1$. Además, se ha dicho que durante el trabajo conjunto de los tractores primero y segundo la parcela puede ser arada en el transcurso de 1 h 12 min, es decir, durante $\frac{6}{5}$ h. Pero, en este tiempo, $\frac{6}{5}$ h, el primer tractor realiza $\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{x}$ parte del trabajo y el segundo, $\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{y}$ fracción de ese trabajo. Esto significa que $\frac{6}{5x}+\frac{6}{5y}=1$.

Como resultado, obtenemos un sistema de tres ecuaciones con tres variables

$$\begin{cases} z - x = 2 \\ x - y = 1 \\ \dfrac{6}{5x} + \dfrac{6}{5y} = 1 \end{cases}$$

que al resolverlo, obtenemos: (3; 2; 5), (—0,4; —0,6; 2,4). La condición del problema sólo se satisface con la primera solución.

Ahora, demos respuesta a la pregunta planteada en el problema. Al trabajar los tres tractores en conjunto el rendimiento del trabajo constituirá $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$, o sea, $\frac{31}{30}$. Es decir, el tiempo necesario para arar la parcela con los tres tractores será igual a $\frac{30}{31}$ h.

EJEMPLO 11. Cuando las cosechadoras del sovjos *) trabajan simultáneamente pueden recolectar la cosecha en el transcurso de un día. Pero, de acuerdo con el plan, las cosechadoras comenzaron a trabajar consecutivamente: durante la primera hora sólo trabajaba una cosechadora, en la segunda, dos y en la tercera, tres, etc., y así, hasta que emprezaron a trabajar todas las cosechadoras que trabajaron conjuntamente varias horas hasta la recolección completa de la cosecha. El tiempo de trabajo, previsto por el plan, podría reducirse en 6 h si desde el principio de la recolecta trabajasen continuamente todas las cosechadoras salvo cinco de ellas. ¿Cuántas cosechadoras habrá en el sovjos?

SOLUCIÓN. Tomemos el valor de todo el trabajo igual a 1 e introduzcamos tres variables: n, el número de cosechadoras en el sovjos, x, el rendimiento del trabajo de una cosechadora por 1 h. t h, el tiempo de trabajo conjunto de las cosechadoras según el plan. De acuerdo con el planteamiento, n cosechadoras, con rendimiento x cada una de ellas, pueden realizar la recolecta en el transcurso de 24 horas, es decir, $24nx = 1$.

Según el plan, durante la primera hora trabajaba una cosechadora. El volumen de trabajo realizado en esta hora es igual a x. En la segunda hora trabajaban dos cosechadoras y en el transcurso de ella realizaron un volumen de trabajo igual a $2x$. En la tercera hora, tres cosechadoras efectuaron un volumen de trabajo igual a $3x$, etc. En $(n - 1)$ hora $(n - 1)$ cosechadora hicieron un trabajo igual a $(n - 1)\,x$. Después de esto, en el transcurso de t h, trabajaron todas las n cosechadoras y el volumen de trabajo realizado por ellas es igual a ntx. Como resultado, el trabajo planificado de las cosechado-

* Sovjoz, abreviatura de granja agrícola estatal (*N. del T.*)

ras se describe con la siguiente ecuación:

$$x + 2x + \ldots + (n - 1)\,x + ntx = 1. \qquad (3)$$

Hemos de señalar que $x + 2x + \ldots + (n - 1)\,x$ es la suma de $(n - 1)$ términos de la progresión aritmética (a_n) en la que $a_1 = x$, $d = x$. Esto quiere decir que

$$x + 2x + \ldots + (n-1)\,x = \frac{x + (n-1)\,x}{2}\,(n-1) = \frac{n\,(n-1)\,x}{2}$$

y la ecuación (3) toma la forma $nx\left(\frac{n-1}{2} + t\right) = 1$.

Por fin, del planteamiento sigue que si desde el comienzo hubieran trabajado $(n - 5)$ cosechadoras, la labor hubiera durado no $(n - 1 + t)$ h, como estaba previsto en el plan, sino 6 h menos, es decir, $((n - 1) + t - 6)$ h y, entonces, $(n + t - 7)\,(n - 5)\,x = 1$.

Como resultado obtenemos un sistema de tres ecuaciones respecto de tres variables n, x, t:

$$\begin{cases} 24nx = 1 \\ nx\left(\frac{n-1}{2} + t\right) = 1 \\ (n + t - 7)\,(nx - 5x) = 1. \end{cases}$$

De la primera ecuación hallamos $nx = \frac{1}{24}$. Poniendo esta expresión en la segunda y tercera ecuaciones del sistema, obtenemos:

$$\begin{cases} nx = \frac{1}{24} \\ \frac{n-1}{2} + t = 24 \\ (n + t - 7)\left(\frac{1}{24} - 5x\right) = 1. \end{cases}$$

A continuación, el sistema se resulve sin dificultad según el método de sustitución. De la primera ecuación hallamos $x = \frac{1}{24n}$, de la segunda, $t = \frac{49 - n}{2}$. Poniendo estas expresiones en la tercera ecuación, obtenemos:

$$\frac{(n + 35)\,(n - 5)}{48n} = 1,$$

de donde hallamos $n = 25$ (la segunda solución no satisface el planteamiento). Es decir, en el sovjos había 25 cosechadoras.

5. Problemas sobre aleaciones y mezclas. En los problemas de este tipo se trata de la creación de mezclas, aleaciones, disoluciones, etc. La resolución de semejantes problemas está relacionada con los

conceptos de «concentración», «porcentaje», «muestra», «humedad», etc., y se basa en las siguientes suposiciones:

1. Todas las mezclas obtenidas (aleaciones, disoluciones) son homogéneas.

2. No se hace diferencia entre el litro como unidad de capacidad y el litro como unidad de masa.

Si una mezcla (aleación, disolución) de masa m consta de las sustancias A, B, C (que tienen masas m_1, m_2, m_3, respectivamente), la magnitud $\frac{m_1}{m}$ $\left(\frac{m_2}{m}, \frac{m_3}{m}\right.$, respectivamente$\left.\right)$ se denomina *concentración* de la sustancia A (B, C, respectivamente) en la mezcla. La magnitud $\frac{m_1}{m}100\%$ $\left(\frac{m_2}{m}100\%, \frac{m_3}{m}100\%\right.$, respectivamente$\left.\right)$ recibe el nombre de *porcentaje* de la sustancia A (B, C, respectivamente) en la mezcla. Está claro, que $\frac{m_1}{m}+\frac{m_2}{m}+\frac{m_3}{m}=1$, es decir, de la concentración de dos sustancias depende la concentración de la tercera.

EJEMPLO 12. Tenemos un trozo de una aleación de cobre y estaño de una masa de 12 kg que contiene el 45% de cobre. ¿Qué cantidad de estaño puro hay que añadir a esta aleación para que la nueva contenga el 40% de cobre?

SOLUCION. Sea que la masa de estaño que hay que añadir a la aleación es igual a x kg. Entonces, se obtendrá una aleación de masa $(12 + x)$ kg con un contenido del 40% de cobre. O sea, en la nueva aleación hay $\frac{12+x}{100}40$ kg de cobre. La aleación inicial de 12 kg de masa contenía el 45% de cobre, es decir, en ella había $\frac{12}{100}\cdot 45$ kg. Como la masa de cobre, tanto en la aleación inicial como en la nueva es la misma, podemos escribir la siguiente ecuación:

$$\frac{(12+x)\,40}{100}=\frac{12}{100}\cdot 45.$$

Después de resolverla, obtenemos $x = 1{,}5$. Así, pues, a la aleación inicial hay que añadir 1,5 kg de estaño.

EJEMPLO 13. Tenemos acero de dos clases con contenido de níquel del 5% y 40%. ¿Qué cantidad de acero de una y otra marca hay de tomar para después de la refundición producir 140 t de acero con contenido de níquel del 30%?

SOLUCIÓN. Sea la masa del acero de la primera marca igual x t, entonces hay que tomar $(140 - x)$ t de acero de la segunda marca. El contenido de níquel en el acero de la primera marca constituye el 5%, por lo tanto en x t de acero de dicha marca habrá $x\cdot 0{,}05$ t de níquel. El contenido de este metal en el acero de la segunda marca es el 40%, por lo que en $(140 - x)$ t de acero de la segunda marca el

contenido de níquel constituye $(140 - x)\,0{,}4$ t. Según el planteamiento, después de unir las dos marcas de acero tomadas ha de obtenerse 140 t de acero con un contenido de níquel igual al 30%, es decir, al acabar la refundición en el acero producido deben haber $140 \cdot 0{,}3$ t de níquel. Pero esta cantidad de níquel se forma de $x \cdot 0{,}05$ t, contenidas en el acero de la primera marca y de $(140 - x) \times$ $\times 0{,}4$ t, en el de la segunda. Así, pues, escribamos la ecuación

$$x \cdot 0{,}05 + (140 - x)\,0{,}4 = 140 \cdot 0{,}3,$$

de donde hallamos $x = 40$. Por lo tanto, hay de tomar 40 t de acero con contenido del 5% de níquel y 100 t, de acero con el 40% de níquel.

EJEMPLO 14 De un recipiente de 54 l de capacidad, lleno de ácido, se han vertido varios litros y se agrega agua y, a continuación, de nuevo, se vierte la misma cantidad de litros de la mezcla. Entonces, en la mezcla restante quedan 24 l de ácido puro. ¿Qué cantidad de ácido fue vertida la primera vez?

SOLUCIÓN Sea que la primera vez se virtió x l de ácido. Entonces en el recipiente quedaron $(54 - x)$ l de ácido. Al añadir agua al recipiente obtuvimos 54 l de la mezcla, en la que se diluyeron $(54 - x)$ l de ácido. Esto significa que 1 l de la mezcla contiene $\frac{54-x}{54}$ l de ácido (concentración de la mezcla). En el segundo caso, del recipiente se vertieron x l de la mezcla y esta cantidad contenía $\frac{54-x}{54} \cdot x$ l de ácido. Así, pues, la primera vez se vertieron x l de ácido, la segunda, $\frac{54-x}{54} \cdot x$. Durante las dos veces fueron vertidos $54 - 20 = 30$ l de ácido. Como resultado, elaboramos la ecuación

$$x + \frac{54-x}{54}\,x = 30.$$

Después de resolverla obtenemos dos raíces $x_1 = 90$, $x_2 = 18$. Claro está que el valor $x_1 = 90$ no satisface el problema. Por lo tanto, la primera vez fueron vertidos 18 l de ácido.

EJEMPLO 15 Un receptáculo de 8 l de capacidad está relleno de una mezcla de oxígeno y nitrógeno, con la particularidad de que el oxígeno ocupa el 16% de la capacidad del receptáculo. De él se evacua cierta cantidad de la mezcla, se rellena el receptáculo de nitórgeno y, de nuevo, se evacua una misma cantidad de la mezcla, después de lo cual al receptáculo se añade nitrógeno. Como resultado en el recipiente el contenido de oxígeno es igual al 9%. ¿Cuántos litros de la mezcla se evacuó del receptáculo cada vez?

SOLUCIÓN Supongamos que cada vez se evacuaban x l de la mezcla y se alimentaban x l de nitrógeno. Después de la primera evacuación

en el receptáculo quedaban $(8-x)\cdot 0{,}16$ l de oxígeno que se diluyeron en 8 l de la mezcla (luego de añadir por primera vez nitrógeno). En esta etapa, la concentración de oxígeno es igual a $\frac{(8-x)\cdot 0{,}16}{8}$, es decir, $(8-x)\,0{,}02$. Al haber evacuado por segunda vez x l de la mezcla, en el receptáculo quedaron $(8-x)$ l de la mezcla con una concentración de oxígeno igual a $(8-x)\,0{,}02$, es decir, quedaban $(8-x)(8-x)\,0{,}02$ l de oxígeno, que se diluyeron en 8 l de la mezcla (después de alimentar nitrógeno por segunda vez). En esta etapa, la concentración de oxígeno es igual a $\frac{(8-x)^2\cdot 0{,}02}{8}$ y el porcentaje, $\frac{(8-x)^2}{8}\,0{,}02\cdot 100\%$. Así, pues, obtenemos la ecuación

$$\frac{(8-x)^2\cdot 0{,}02}{8}\cdot 100=9,$$

de donde hallamos $x_1=2$, $x_2=14$. Como vemos, es imposible evacuar 14 l de un receptáculo en el que había 8 l.

De forma que cada vez se evacuaban del receptáculo 2 l de la mezcla.

EJEMPLO 16. Tenemos dos aleaciones de masa a kg y b kg con diferente porcentaje de cobre. De cada una de las aleaciones se cortó

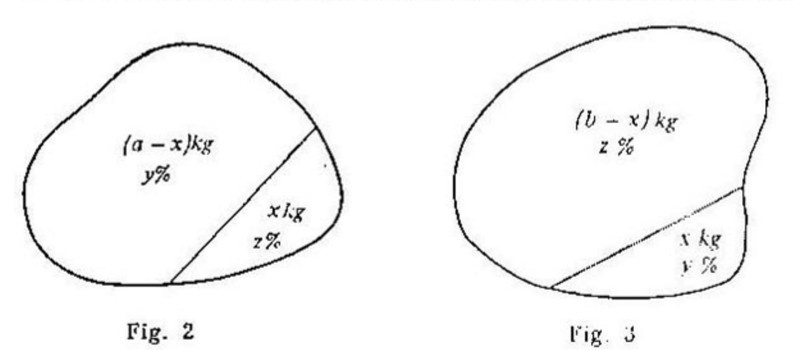


Fig. 2 Fig. 3

un trozo de igual masa, los cambiaron de lugar y fundieron junto con los restantes trozos de las aleaciones iniciales. En las nuevas aleaciones el porcentaje de cobre se hizo igual. ¿Cuál es la masa de cada uno de los trozos cortados?

SOLUCIÓN. Sea x kg la masa de cada uno de los trozos cortados, y %, el porcentaje de cobre en la primera aleación, z %, el porcentaje de cobre en la segunda.

Después de cambiar de lugar las partes de masa x kg en la primera aleación obtenida (fig. 2) la cantidad de cobre será $\frac{a-x}{100}\cdot y+\frac{x}{100}\cdot z$,

y el porcentaje de cobre será igual a $\dfrac{\frac{a-x}{100}\cdot y+\frac{x}{100}\cdot z}{a}$ 100%, es decir, $\dfrac{(a-x)\,y+xz}{a}$.

En la segunda aleación obtenida (fig. 3) habrá una cantidad de cobre $\frac{b-x}{100}\cdot z+\frac{x}{100}\cdot y$, mientras que el porcentaje de cobre será $\dfrac{\frac{b-x}{100}\cdot z+\frac{x}{100}\cdot y}{b}\cdot 100\%$, es decir, igual a $\dfrac{(b-x)\,z+xy}{b}$. De acuerdo con el planteamiento, en las aleaciones obtenidas el porcentaje de cobre es el mismo. Así, pues, llegamos a la ecuación

$$\frac{(a-x)\,y+xz}{b}=\frac{(b-x)\,z+xy}{b}.$$

Sucesivamente tenemos:

$$aby-bxy+bzx=abz-axz+axy,$$
$$(aby-abz)-(bxy-bxz)-(axy-axz)=0,$$
$$ab\,(y-z)-bx\,(y-z)-ax\,(y-z)=0,$$
$$(y-z)\,(ab-ax-bx)=0.$$

Según el planteamiento $y\neq z$, de forma que $ab-ax-bx=0$, de donde hallamos $x=\frac{ab}{a+b}$. Las variables y, z se eliminaron durante la resolución de la ecuación obtenida (auxiliares).

Así, pues, la masa de cada uno de los trozos cortados es igual a $\frac{ab}{a+b}$ kg.

EJERCICIOS

480. La suma de los cuadrados de las cifras de un número de dos cifras es igual a 10. Si del número buscado sustraemos 18, obtenemos un número escrito con esas mismas cifras, pero en orden inverso. Hallen el número buscado.
481. ¿Qué número de dos cifras es 4 veces mayor que la suma de sus cifras y 3 veces mayor que el producto de ellas?
482. Hallen dos números enteros, cuya suma es igual a 1244. Si al primer número se inscribe a la derecha la cifra 3 y del segundo se elimina la última cifra 2, los números obtenidos serán iguales.
483. Un número de tres cifras termina con la cifra 3. Si ésta se traspasa al comienzo del número, el nuevo será mayor en 1 que el número inicial triplicado. Hallen el número inicial.
484. Un número de seis cifras comienza por la cifra 2. Si traspasamos ésta del primer puesto al último, conservando el orden de las demás, el número obtenido será tres veces mayor que el inicial. Hallen éste.
485. La suma de todos los números pares fue dividida sin resto por uno de ellos. Hallen el divisor si sabemos que la suma de sus cifras es igual a 9 y que el cociente se diferencia del divisor sólo por el orden de las cifras.

486. Si dividimos un número de dos cifras por la suma de éstas, en el cociente obtendremos 7 y en el resto 6. Si ese mismo número de dos cifras se divide por el producto de sus cifras, en el cociente obtendremos 3 y en el resto, un número igual a la suma del número inicial. Hallen el número inicial de dos cifras.

487. La suma de dos números de tres cifras, escritos con cifras iguales, pero en orden inverso, es igual a 1252. Hallen dichos números si la suma de sus cifras es igual a 14 y la suma de los cuadrados de ellas es 84.

488. Un turista que sube a una montaña alcanzó en el transcurso de la primera hora la altura de 800 m, mientras que durante cada siguiente hora subió a una altura de 25 m menor que en la anterior. ¿Cuántas horas pasarán hasta alcanzar la altura de 5700 m?

489. Al dividir el noveno término de una progresión aritmética por su segundo término, en el cociente se obtiene 5, mientras que al dividir el término décimotercero de la progresión por su sexto término en el cociente tendremos 2 y en el resto 5. Hallen la suma de 20 miembros de la progresión.

490. La suma de una progresión geométrica infinitamente decreciente es igual a 4, en tanto que la suma de los cubos de sus términos, igual a 192. Hallen el primer término y la razón de la progresión.

491. Hallen cuatro números de los que los primeros tres forman una progresión aritmética y los tres últimos, una geométrica; la suma de los números extremos es igual a 60 y la de los medios, 60.

492. La suma de los tres primeros términos de una progresión geométrica es igual a 91. Si a estos términos adicionamos 25, 27 y 1, respectivamente, obtenemos tres números que forman una progresión aritmética. Hallen el séptimo término de la progresión geométrica.

493. Hallen un número de tres cifras, en el cual las cifras forman una progresión geométrica. Si de este número sustraemos 792, obtenemos un número escrito con esas mismas cifras, pero en orden contrario. Si de la cifra que expresa el número de centenas, sustraemos 4 y si dejamos las restantes cifras del número buscado sin variar, hallamos un número, cuyas cifras componen una progresión aritmética.

494. Hallen un número de cuatro cifras, en el que las tres primeras forman una progresión aritmética creciente, si sabemos que él se divide por 225.

495. Tres hermanos, cuyas edades forman una progresión geométrica, dividen entre sí cierta suma de dinero de modo proporcional a la edad. Si esa misma suma de dinero la dividieran proporcionalmente a su edad tres años más adelante, el menor de los hermanos recibiría 105 rublos más, el mediano, 15 rublos más que ahora. ¿Cuál es la edad de los hermanos si sabemos que la diferencia de años entre el mayor y el menor de ellos es igual a 15 años?

496. Hallen el número de términos de una progresión artimética, en la que la razón entre la suma de los 13 primeros términos y la de los 13 últimos es igual a $\frac{1}{2}$, en tanto que la razón entre la suma de todos los términos sin los tres primeros y la de todos los términos sin los 3 últimos es igual a $\frac{4}{3}$.

497. La suma de una progresión geométrica infinitamente decreciente es igual a $\frac{16}{3}$. La progresión contiene un término igual a $\frac{1}{6}$. La razón entre la suma de todos los términos de la progresión, que preceden al que es igual a $\frac{1}{6}$, y la suma de los términos que le siguen, es igual a 30. Determinen el número del término igual a $\frac{1}{6}$.

498. Una aleación pesa 2 kg y consta de plata y cobre, con la particularidad de que la masa de la plata constituye el $14\frac{2}{7}\%$ de la masa del cobre. ¿Qué cantidad de plata hay en la aleación?
499. Se ha comprado 1 m de tejidos de dos calidades por una suma de 15 rublos 20 kopeks. Si el precio del tejido de la primera calidad fuera más alto y de la segunda, más bajo en un mismo por ciento, 1 m del tejido de la primera calidad costaría 15 rublos y de la segunda, 2 rublos 40 kopeks. ¿Cuánto cuesta 1 m del tejido de primera calidad?
500. Un número dígito fue aumentado en 10. Si el número obtenido se aumentara al mismo por ciento que la primera vez, obtendríamos 72. Hallen el número dígito inicial.
501. De acuerdo con el plan, dos fábricas deberían producir 360 máquinas-herramientas al mes. La primera de ellas cumplió el plan en el 112%, la segunda en el 110% y en conjunto, las dos fábricas produjeron 400 máquinas-herramientas. ¿Cuántas máquinas produjo cada fábrica por separado superando el plan?
502. Para producir pan de trigo (blanco) se han tomado tantos kilogramos de harina, como el por ciento que constituye el aumento de peso de dicha harina. Para producir pan de centeno (moreno) se han tomado 10 kg de harina más y, precisamente, tantos kilogramos como el por ciento que constituye el aumento de peso de la harina de centeno. ¿Que cantidad de harina de uno y otro género se ha tomado si en total se han producido 112,5 kg de pan?
503. ¿Si disminuyera el día laboral de 8 a 7 horas en qué por ciento hay que aumentar el rendimiento del trabajo para que con las mismas tarifas el sueldo aumente el 5%?
504. A principios de año en la cartilla de ahorros fueron puestos 1600 rublos y a finales de él, sacados 848 rublos. A finales del segundo año en la cartilla había 824 rublos. ¿Qué interés pone en cuenta al año la caja de ahorros?
505. A fines de año en la cartilla de ahorros del depositante la caja de ahorros puso en cuenta el interés, lo que constituyó 6 rublos. El depositante añadió 44 rublos y dejó su dinero en la caja para un año más. Al acabar el año, de nuevo pusieron en cuenta los intereses, y, ahora, el depósito, junto con los intereses, constituía 257 rublos 50 kopeks. ¿Qué suma fue depositada en la cuenta de ahorros inicialmente?
506. El precio del artículo fue rebajado el 20%, a continuación, el nuevo precio lo rebajaron el 15%; por fin, después del recálculo se efectuó la rebaja al 10% más ¿A qué por ciento total fue rebajado el precio inicial?
507. La cantidad de estudiantes en un centro de enseñanza, aumentando el mismo por ciento anualmente, creció en tres años de 5000 a 6655 personas. ¿En qué tanto por ciento aumentó anualmente el número de estudiantes?
508. El volumen de la sustancia A constituye la mitad de la suma de los volúmenes de las sustancias B y C, en tanto que el volumen de la sustancia B, el 20% de la suma de los volúmenes de las sustancias A y C. Hallen la razón entre el volumen de la sustancia C y la suma de los volúmenes de las sustancias A y B.
509. Como resultado de la reconstrucción de un taller el número de obreros que quedaron libres puede encontrarse en los límites del 1,7 al 2,3%. Hallen el número mínimo de obreros que puede estar ocupado en el taller antes de la reconstrucción.
510. El por ciento de estudiantes del curso que han dado todos los exámenes preliminares se halla en los límites del 96,8 al 97,2%. Hallen el número mínimo de estudiantes que puede haber en dicho curso.
511. Un turista tiene que cubrir la distancia desde el pueblo hasta la estación de ferrocarril. Después de pasar 3 km él comprendió que llegaba tarde al tren y empezó a andar a una velocidad de 4 km/h. El turista llegó a la

estación 45 min antes de la partida del tren. Si él hubiera ido a la velocidad inicial se habría demorado 40 min. Determinen la distancia desde el pueblo hasta la estación.

512. Un pasajero que viaja en un tren a una velocidad de 40 km/h observó por la ventana que en sentido opuesto, en el transcurso de 3 s, pasó un tren de 75 m de longitud. ¿Cuál era la velocidad del tren que iba en dirección contraria?

513. Un ciclista debería cubrir 48 km a velocidad media determinada. Pero, por ciertas causas, la primera mitad del recorrido se desplazó a una velocidad el 20% menor, mientras que la segunda, a 2 km mayor que la necesaria. Para cubrir todo el recorrido el ciclista gastó 5 h. Hallen la velocidad que al principio se preveía.

514. Tres cuerpos se mueven por una recta del punto A al B. El segundo cuerpo comenzó a desplazarse 5 s y el tercero, 8 s después que el primero. La velocidad del primer cuerpo es 6 cm/s menor que la del segundo. La velocidad del tercero es igual a 30 cm/s. Hallen la distancia AB y la velocidad del primer cuerpo si sabemos que los tres cuerpos llegan al punto B en el mismo momento.

515. Al principio el avión volaba a la velocidad de 220 km/h. Cuando le quedaban por volar 385 km menos que los ya cubiertos, la velocidad aumentó hasta 330 km/h. En el transcurso de todo el recorrido la velocidad media del avión era igual a 250 km/h. ¿Qué distancia voló el avión?

516. De los puntos A y B salieron al encuentro, simultáneamente, dos trenes. La velocidad del primer tren es 10 km/h mayor que la del segundo. Los trenes se encontraron a 28 km de la mitad del recorrido AB. Si el primer tren hubiera partido de A 45 min más tarde que el segundo, los trenes se encontrarían en la mitad del recorrido AB. Hallen la distancia AB y las velocidades de ambos trenes.

517. Dos escolares salieron al mismo tiempo de casa a igual velocidad. Uno de ellos, 3 min después se acordó de que había dejado en casa un libro que necesitaba y retornó a casa a una velocidad de 60 m/min mayor que la inicial. Después de coger el libro comenzó de nuevo su camino a la misma velocidad y alcanzó a su compañero, que iba a velocidad constante, ya junto a la puerta de la escuela. Hallen las velocidades de los escolares si la distancia entre la escuela y la casa es 280 m.

518. Dos transeúntes que se hallan en los puntos A y B, entre los que hay una distancia de 27 km en línea recta, salen de ellos simltáneamente, desplazándose por la recta AB. Ellos se encuentran después de 3 h si van al encuentro y uno alcanza al otro 9 h después, si se mueven en una misma dirección. Hallen la velocidad de cada uno de los transeúntes.

519. Por los dos lados de un ángulo recto, se mueven dos cuerpos en dirección de su vértice. En el momento inicial el cuerpo A estaba distanciado del vértice del ángulo recto a 60 m, el cuerpo B, a 80 m. Pasados 3 s la distancia entre A y B se hizo igual a 70 m y después de 2 s más, 50 m. Hallen la velocidad de cada uno de los cuerpos.

520. Por el río, la distancia entre dos ciudades es igual a 80 km. Una lancha pasa esta distancia dos veces (hacia arriba y abajo) en el transcurso de 8 h 20 min. Determinen la velocidad de la lancha en agua estancada si la velocidad de la corriente del río es igual a 4 km/h.

521. Una lancha se desplazó por un río aguas arriba 8 km, dio la vuelta y se desplazó aguas abajo 36 km. Todo el viaje duró 2 h. Después, la lancha cubrió 6 km contra corriente y a favor de ella, 33 km, gastando en el segundo viaje 1 h 45 min. Hallen la velocidad de la lancha en agua estancada.

522. En un lago desembocan dos ríos. Una lancha parte del muelle A, situado en el primer río, se desplaza 24 km hacia abajo, hasta el lago después boga 2 km por el lago, y, a continuación, 32 km por el segundo río hasta el

muelle B, cubriendo la distancia desde A hasta B en 8 h. Si la lancha hubiera navegado por el lago 18 km más, todo el recorrido de A a B consumiría 10 h. Hallen la velocidad de la corriente de cada río si sabemos que la velocidad del primer río es 2 km/h mayor que la del segundo.

523. Dos peatones salieron, simultáneamente, al encuentro de los puntos A y B. Cuando el primero pasó la mitad del camino, al segundo, hasta el final del recorrido, le quedaban 24 km. Cuando el segundo cubrió la mitad del recorrido, al primero le quedaban 15 km más hasta el final. ¿Cuántos kilómetros ha de recorrer el segundo peatón hasta A después de que el primero cubre el camino desde A hasta B?

524. De los puntos A y B salen al encuentro dos trenes, con la particularidad de que el segundo partió media hora después que el primero. Al pasar 2 h después de la partida del primer tren, la distancia entre ellos constituía $\frac{19}{30}$ de la distancia entre A y B. Los trenes se encontraron en la mitad del camino desde A hasta B. ¿Cuánto tiempo necesitará cada tren para cubrir todo el recorrido AB?

525. La distancia entre las ciudades A y B es igual a 60 km. Dos trenes parten simultáneamente: uno de A a B y otro, de B a A. Pasados 20 km el tren que va de A a B se detiene media hora y, a continuación, desplazándose 4 min, se encuentra con el tren que viene de B. Los dos trenes llegan al mismo tiempo al punto de destino. Hallen las velocidades de los trenes.

526. Dos ciclistas salieron al mismo tiempo de los puntos A y B al encuentro uno de otro. El ciclista que se desplazaba del punto A llegó a B pasadas 4 h, en tanto que el que iba del punto B, llegó a A 9 h después del encuentro con el otro ¿Cuántas horas estuvieron cada uno de los ciclistas en el camino?

527. Del punto A, corriente arriba, partió una motora y del punto B, situado más arriba que el punto A por la corriente, salió, simultáneamente, una balsa. Pasadas a h ellas se encontraron y, más adelante, se desplazaron sin paradas. Al llegar a B, la motora, sin detenerse, dio la vuelta y alcanzó la balsa en el punto A. ¿Cuánto tiempo navegaron la balsa y la motora hasta encontrarse en el punto A, si sabemos que la velocidad propia de la motora es constante?

528. La distancia entre dos ciudades es cubierta por un tren rápido 4 h antes que un tren de mercancías y 1 h antes que uno ordinario. Sabemos que la velocidad del de mercancías constituye $\frac{5}{8}$ de la del ordinario y es 50 km/h menor que la del rápido. Hallen las velocidades de los trenes de mercancías y del rápido.

529. De dos puntos, entre los que hay una distancia igual a 2400 km, salieron, simultáneamente, al encuentro un tren ordinario y un rápido. Cada uno de ellos se desplaza a velocidad constante y, en cierto momento de tiempo, ellos se encuentran. Si ambos se movieran a la velocidad del rápido, su encuentro hubiera acontecido 3 h antes que el momento real del encuentro. Si ambos trenes marcharan a la velocidad del ordinario su encuentro se hubiera producido 5 h después del momento real del encuentro. Hallen las velocidades de los trenes.

530. Por una circunferencia de 360 m de largura, se mueven dos puntos, con la particularidad de que el primero recorre la circunferencia 1 s más rápido. Hallen la velocidad de cada punto si sabemos que el primer punto pasa por 1 s 4 m más que el segundo.

531. Dos puntos, en movimiento por una circunferencia en una misma dirección, se encuentran después de cada 20 s y estando en movimiento en direcciones opuestas, cada 4 s. Hallen la velocidad de cada punto, si se sabe que la longitud de la circunferencia es igual a 100 m.

532. Dos puntos que se mueven por una circunferencia en la misma dirección,

se encuentran cada 56 min y estando en movimiento en direcciones opuestas, cada 8 min. Hallen la velocidad de cada punto y la longitud de la circunferencia, si sabemos que durante 1 s el primer punto cubre una distancia $\frac{1}{12}$ m mayor que el segundo.

533. Dos puntos en movimiento por una circunferencia en una misma dirección, se encuentran cada 12 min, con la particularidad de que el primero da la vuelta a la circunferencia 10 s más rápido que el segundo. ¿Qué parte de la circunferencia cubre en 1 s cada uno de los puntos?

534. Una motonave partió del punto A al B y, después de 7,5 h, tras ella del punto A salió una lancha motora. En la mitad del recorrido de A a B la motora alcanzó a la motonave. Cuando la primera llegó a B, a la segunda le quedaban navegar $\frac{3}{10}$ de todo el recorrido. ¿Cuánto tiempo es necesario para que la motonave pase la distancia de A a B?

535. Del punto A al B salió un tren ordinario. Tras él, 3 h después, partió de A un rápido. Éste alcanzó al ordinario en la mitad del recorrido de A a B. En el momento de la llegada del rápido a B el ordinario cubrió $\frac{15}{16}$ de todo el recorrido ¿Cuánto tiempo necesitará el tren ordinario para cubrir la distancia de A a B?

536. Del punto A al B salió un peatón. Después de 3/4 h, tras el partió un ciclista. Cuando éste llegó a B al peatón le quedaban por pasar 3/8 de todo el camino. ¿Cuánto tiempo necesitó el peatón para cubrir todo el recorrido, si sabemos que el ciclista alcanzó al peatón en la mitad de la distancia de A a B?

537. Del punto A al B, entre los que la distancia es igual a 70 km, salió un ciclista, y, cierto tiempo después, un motociclista, cuya velocidad era 50 km/h. Ésta alcanzó al ciclista a 20 km del punto A. Tras haber llegado a B, 48 min después, el motociclista salió en dirección contraria hacia A y se encontró con el ciclista pasadas 2 h 40 min luego de salir éste de A. Hallen la velocidad del ciclista.

538. Del desembarcadero A, corriente del río abajo, salieron, simultáneamente, una lancha y una balsa. La primera, después de llegar al muelle B, situado a 324 km de A, pasadas 18 h de escala en él, partió de nuevo en dirección de A. En el momento cuando se encontraba a 180 km del muelle A, la segunda lancha que salió de A 40 horas más tarde de la primera, alcanzó a la balsa que, hasta entonces, había cubierto una distancia de 144 km. Hallen las velocidades de ambas lanchas, si se sabe que son iguales y se conoce la velocidad de la corriente del río.

539. En el río desemboca un afluente. Una lancha parte del muelle A, situado en el afluente, va corriente abajo 60 km hasta el río, a continuación río abajo 65 km hasta el desembarcadero B. Mas adelante, por ese mismo itinerario, la lancha retorna, necesitando para el recorrido inverso 10 h. Hallen la velocidad propia de la lancha si sabemos que para el recorrido por el río desde A, la lancha gasta 3 h 45 min y la velocidad de la corriente del río es 1 km/h menor que la de la corriente del afluente

540. Dos nadadores partieron, uno tras otro, en una piscina de 50 metros para la distancia de 100 m. El segundo nadador, cuya velocidad es igual a a 1,5 m/s, alcanzó al primero en la marca 21 m, después, al llegar a la pared opuesta de la piscina, dio la vuelta y se encontró con el primer nadador después de $\frac{2}{3}$ s de darla. Hallen el intervalo de tiempo entre los momentos de partida de los nadadores.

541. Del punto A, en una misma dirección, salieron dos esquiadores, con la particularidad de que el segundo partió 6 min después que el primero y que

alcanzó a éste a 2 km de la línea de salida. Al llegar a la marca de 5 km el segundo esquiador dio la vuelta y se encontró con el primero a 4 km de la línea de salida. Hallen la velocidad del segundo esquiador.

542. Dos ciclistas partieron, uno tras otro, con un intervalo de 2 min. El segundo alcanzó al primero a la distancia de 1 km de la línea de salida. Si después de recorrer 5 km desde la línea de salida, él hubiera dado la vuelta hacia atrás, se encontraría con el primer ciclista 20 min después de la partida de éste. Hallen la velocidad del segundo ciclista.

543. De A a B, simultáneamente, salen un ciclista y un peatón. La velocidad del ciclista es dos veces mayor que la del peatón. Al mismo tiempo, a su encuentro, de B a A sale el segundo peatón. El tiempo entre los encuentros de éste con el ciclista y el primer peatón constituye $\frac{2}{15}$ de la fracción del tiempo necesario para su recorrido de B a A. ¿Cuál de los peatones y cuántas veces iba más rápido, si hasta encontrarse los dos cubrieron más de $\frac{1}{4}$ de toda la distancia de A a B.

544. Del punto A al B salió una motonave. A las 8 h ella alcanzó a una lancha, que iba por ese mismo recorrido, cuya velocidad era igual a 3 km/h. Al retornar de A a B, en el que tuvo una parada de 10 min, la motonave se encontró con esa misma lancha a las 8 h 20 min. Al punto A la motonave llega cuando la lancha alcanza el punto B. Determinen el tiempo de llegada de la lancha al punto B, si sabemos que a las 8 h 10 min ella se encontraba a 1,5 km del punto A.

545. Si un pasajero sale en tren del punto A, al punto B llegará después de 20 h. Si él vuela en avión, que debe esperar más de dos horas, llegará a B pasadas 10 h luego de partir el tren. ¿Cuántas veces es mayor la velocidad del avión que la del tren, si sabemos que tras $\frac{8}{9}$ h de comenzar el vuelo el avión se encontrará a la misma distancia del punto A que el tren?

546. Del punto A al B salen, simultáneamente, un peatón y un ciclista. Llegado a B el ciclista da la vuelta y, tras 1 h de haber comenzado el movimiento, se ecuentra con el peatón. Después del encuentro el peatón continúa su camino hacia B y el ciclista da la vuelta y también se dirige a B. Habiendo alcanzado B, el ciclista de nuevo retorna y, una vez más, se encuentra con el peatón pasados 40 min del primer encuentro. Determinen cuánto tiempo necesitará el peatón para cubrir la distancia de A a B.

547. Del punto A salieron tres ciclistas. El primero partió 1 h antes que los otros dos que comenzaron el movimiento simultáneamente. Pasado cierto tiempo, el tercer ciclista alcanzó al primero, mientras que el segundo igualó al primero 2 h después que el tercero. Determinen la razón entre las velocidades de los ciclistas primero y tercero, si la razón entre las velocidades de los ciclistas segundo y tercero es igual a 2 : 3.

548. La distancia entre los puntos A y B es igual a 105 km. De A a B salió un autobús a una velocidad de v km/h. Después de 30 min, tras él, salió un automóvil, cuya velocidad era igual a 40 km/h. Tras de haber alcanzado al autobús, el automóvil da la vuelta y, a la misma velocidad, retorna hacia A. ¿Con qué valores de la velocidad v el autobús llegará a B antes que el automóvil llegue a A?

549. Simultáneamente, de los puntos A y B salen dos correos al encuentro uno de otro. Pasado cierto tiempo ellos se encuentran. Si el primer correo hubiese salido 1 h antes y el segundo, 0,5 h más tarde, ellos se habrían encontrado 48 min antes. Si el primero saliera 0,5 h después y el segundo, 1 h antes, el lugar del encuentro se trasladaría a 5000 m. ¿Cuál es la velocidad de cada correo?

550. Entre los puntos A y B se encuentra el C, con la particularidad de que $AC =$

$= 17$ km, $BC = 3$ km. De A a B partió un automóvil que, al recorrer menos de dos kilómetros, se paró. Cierto tiempo después él siguió su camino hacia B y, en este momento de tiempo, de C a B partieron un peatón y un ciclista, cada uno de los que al alcanzar B, de inmediato, comenzaron el camino inverso. ¿Con cuál de ellos se igualará antes el automóvil, si sabemos que la velocidad de éste es 4 veces mayor que la del ciclista y 8 veces mayor que la del peatón?

551. Del punto A al punto B salió un peatón. Simultáneamente, de B a A, a su encuentro, partió un motociclista. Al encontrarse con el peatón, el motociclista lo montó en su moto, lo llevó a B, allí lo dejó y, de nuevo, partió hacia A. Como consecuencia, el peatón alcanzó B 4 veces más rápido de lo que planeó. ¿Cuántas veces más rápido hubiera llegado el motociclista al punto A, si no hubiera tenido que retornar?

552. Del punto A al B se ha traído una mercancía. De A la llevaron primero en un autofurgón y, a continuación, en un camión. La distancia del lugar del trasbordo hasta el punto B es 3 veces menor que desde el punto de trasbordo al punto A. Para llevar la mercancia de A a B ha sido necesaria una cantidad de tiempo igual al tiempo requerido para ir de A a B a una velocidad de 64 km/h. ¿A qué velocidad marchaba el camión, si sabemos que la velocidad del autofurgón era no más de 75 km/h, así como que si éste y el camión hubiesen salido de los puntos A y B al encuentro uno de otro, ellos se habrían encontrado después del intervalo de tiempo necesario para recorrer la distancia de A a B a una velocidad de 120 km/h.?

553. Dos ciclistas salieron, simultáneamente, al encuentro de los puntos A y B y, pasadas 2,4 h, se encontraron. Si el primer ciclista aumentara la velocidad el 50% y el segundo, el 20%, para vencer la distancia de A a B al primero le hubiera hecho falta $\frac{2}{3}$ h más que al segundo ciclista. ¿Cuánto tiempo necesita a cada ciclista para cubrir la distancia entre A y B?

554. Del punto A al B partió un motociclista. Pasadas 2 h salió tras él un automóvil que llegó al punto B al mismo tiempo que el motociclista. Si el automóvil y el motociclista hubiesen salido simultáneamente de A y B al encuentro uno de otro, se habrían encontrado tras pasada 1 h 20 min después de la partida. ¿Cuánto tiempo necesita el motociclista para vencer la distancia de A a B?

555. Del punto A al B salió un ciclista. Al mismo tiempo, de B a A salió un motoscooter y se encontró con el ciclista 45 min después de su salida. ¿Cuánto tiempo necesita el ciclista para cubrir la distancia entre A y B, si sabemos que el motoscooter vence ese mismo recorrido invirtiendo 2 h menos?

556. Para recorrer la distancia de A a B una motonave invierte 3 h y para la vuelta, 4 h. ¿Cuánto tiempo navegará una balsa de A a B?

557. Un electricista bajó por la escalera mecánica en movimiento, empleando para ello 30 s. La segunda vez él bajó por la escalera mecánica parada invirtiendo 45 s. ¿Cuánto tiempo gastaría al bajar si estuviera parado en el peldaño de la escalera en marcha?

558. Del punto A al B salió un autobús. Al llegar a B él continúa el desplazamiento en la misma dirección. En el momento cuando al autobus alcanzó el punto B, del punto A, en esa misma dirección, partió un automóvil. Para cubrir la distancia desde A hasta B el automóvil invierte 3 h 20 min menos que el autobús en el mismo recorrido. ¿Cuántas horas son necesarias para que venzan ese recorrido el automóvil y el autobús, si sabemos que la suma de sus velocidades es 1,5 veces mayor que el tiempo necesario para que el automóvil alcance al autobús?

559. Simultáneamente, de dos puntos A y B salen, al encuentro uno de otro, un ciclista y un autobús. Para el recorrido de A a B el ciclista invierte 2 h 40 min más que el autobús para recorrer la distancia de B a A, mientras que

la suma de dichas horas es $\frac{16}{3}$ veces mayor que el tiempo pasado desde el comienzo del desplazamiento del ciclista y el autobús hasta el momento de su encuentro. ¿Cuánto tiempo invierte el ciclista para ir de A a B y el autobús para vencer la distancia entre B y A?

560. Del punto A al B se ha llevado el correo. Primero lo llevó un motociclista que, cubriendo $\frac{2}{3}$ de la distancia entre dichos puntos, entregó el correo a un ciclista que le esperaba. El correo fue trasladado de A a B durante el intervalo de tiempo necesario para ir de A a B a una velocidad de 40 km/h. Sabemos que si el motociclista y el ciclista hubiesen salido de A a B simultáneamente al encuentro, ellos se hubieran encontrado después del lapso necesario para cubrir la distancia de A a B a la velocidad de 100 km/h. Hallen la velocidad del motociclista suponiendo que ella es mayor que la del ciclista.

561. En una mina de carbón trabajaban primero dos secciones y después de cierto tiempo, comenzó a funcionar la tercera, como resultado de lo cual el rendimiento de la mina aumentó 1,5 veces. ¿Cuántos por ciento del rendimiento de la segunda sección constituye el de la primera si durante 4 meses las secciones primera y tercera extraen, conjuntamente, tanto carbón como arranca la segunda sección en el transcurso de un año?

562. Dos brigadas comenzaron el trabajo a las 8 h. Después de hacer en conjunto 72 piezas, ellas comenzaron a trabajar por separado. A las 15 h quedó claro que al trabajar por separado la primera brigada produjo 8 piezas más que la segunda. Al día siguiente la primera brigada producía cada 1 h una pieza más y la segunda durante 1 h una pieza menos que el primer día. Las brigadas comenzaron a trabajar a las 8 h en conjunto y, habiendo hecho 72 piezas, de nuevo pasaron al trabajo por separado. En el transcurso de esta forma de trabajo, ya hacia las 13 h, la primera brigada produjo 8 piezas más que la segunda. ¿Cuántas piezas por hora producía cada brigada?

563. Una piscina se llena de agua por el primer tubo 5 h antes que por el segundo y 30 h antes que por el tercero. Es conocido que la capacidad de paso del tercer tubo es 2,5 veces menor que la del primer tubo y 24 m^3/h menor que la del segundo tubo. Hallen la capacidad de paso de los tubos primero y tercero.

564. Tres obreros deben hacer 80 piezas iguales. Se sabe que, en conjunto, los tres producen por hora 20 piezas. El primer obrero fue el primero que empezó a trabajar. El hizo 20 piezas invirtiendo para hacerlas más de 3 h. La restante parte de piezas fue hecha por el segundo y tercero obreros. Para acabar todo el trabajo gastaron 8 h. ¿Cuánto tiempo sería necesario al primer obrero para producir las 80 piezas?

565. Un petrolero se llena de petróleo trabajando dos tubos, con la particularidad de que cada uno de ellos rellenó más de $\frac{1}{4}$ de su volumen. Si la cantidad de petróleo alimentado por hora por el primer tubo hubiese sido 1,5 veces mayor y la cantidad de petróleo alimentado por hora por el segundo tubo hubiera sido 4 veces menor, el tiempo necesario para rellenar el petrolero aumentaría $\frac{1}{6}$ parte del tiempo que es necesario para llenar el petrolero por sólo el primer tubo. ¿Por qué tubo se alimenta mayor cantidad de petróleo y cuántas veces más?

566. Por tres tubos se alimenta petróleo a un depósito y de él se evacua por el cuarto. El primer día los tubos tercero y cuarto trabajaron 6 h cada uno, el segundo, 5 h, el primero, 2 h. Como resultado el nivel del petróleo se elevó 4 m. El segundo día los tubos primero y segundo funcionaron 3 h cada uno, el tercero, 9 h, el cuarto, 4 h. Debido a esto, el nivel del petróleo se

elevó 6 m más. El tercer día los tubos segundo y cuarto funcionaron 6 h. ¿Subió o bajó el nivel de petróleo el tercer día?

567. Dos obreros realizaron juntos cierto trabajo en el transcurso de 12 h. Si al principio el primer obrero hubiera hecho la mitad del indicado trabajo y, a continuación, el segundo la parte restante, todo el trabajo hubiese sido efectuado durante 25 h. ¿En el transcurso de qué tiempo podría realizar este trabajo cada uno de los obreros por separado?

568. Dos obreros realizan cierto trabajo. Pasados 45 min de trabajo conjunto, el primer obrero fue enviado a realizar otro trabajo y el segundo obrero acabó la parte restante del trabajo en el transcurso de 2 h 15 min. ¿Cuánto tiempo necesitaría cada uno de los obreros por separado para realizar todo el trabajo, si sabemos que el segundo necesitaría para ello 1 h más que el primero?

569. Dos torneros debían producir un determinado número de piezas. Después de trabajar en conjunto tres horas, continuó trabajando sólo el segundo tornero que trabajó 4 h más. Después de esto, la tarea fue sobrecumplida el 12,5%. ¿Cuánto tiempo sería necesario a cada tornero por separado para cumplir la tarea, si sabemos que el segundo necesitaría 4 h menos que el primero?

570. Una piscina puede llenarse de agua con dos grifos. Si el primero se abre 10 min y el segundo, 20 min, la piscina se llenará. Si el primer grifo se abre 5 min y el segundo, 15 min, se llenará $\frac{3}{5}$ de la piscina. ¿En el transcurso de qué tiempo cada grifo por separado puede llenar toda la piscina?

571. Dos brigadas trabajaron juntas 15 días, después de lo cual a ellas se unió la tercera brigada y pasados 5 días después de esto todo el trabajo fue acabado. Sabemos que la segunda brigada produce al día el 20% más que la primera. Las brigadas segunda y tercera en conjunto podrían realizar todo el trabajo en $\frac{9}{10}$ del tiempo necesario para que todo el trabajo sea realizado por las brigadas primera y tercera al trabajar juntas. ¿Si las tres brigadas trabajaran juntas cuánto tiempo necesitarían para ejecutar todo el trabajo?

572. Para descargar una barcaza se han destinado dos brigadas de cargadores. Si al tiempo durante el cual puede descargar la barcaza la primera brigada añadimos el tiempo que necesita la segunda brigada para hacer ese trabajo, resultan 12 h. ¿En el transcurso de cuántas horas cada brigada puede descargar la barcaza, si la diferencia entre esas horas constituye el 45% de todo el tiempo necesario para descargar la barcaza trabajando juntas las dos brigadas?

573. Para excavar una zanja se destinan dos excavadoras de diferente tipo. El tiempo necesario para que la primera excavadora cave la zanja es 3 h menor que el que precisa la segunda para realizar ese mismo trabajo. ¿Cuántas horas necesitará cada excavadora para excavar la zanja, si la suma de dichas horas es $\frac{144}{35}$ veces mayor que el tiempo necesario para hacer la zanja trabajando juntas?

574. Una motonave se carga con grúas. Primero, durante dos horas, trabajaron 4 grúas de igual potencia, a continuación, a ellas se unieron dos grúas más, pero de menos potencia; pasadas 3 h después de esto la carga finalizó. Si todas las grúas hubieran comenzado a trabajar simultáneamente, la carga hubiese acabado en el transcurso de 4,5 h. ¿Cuánto tiempo necesitan para realizar la carga 1 grúa de elevada potencia y 1 grúa de menor potencia al trabajar juntas?

575. A un foso se alimenta agua uniformemente. 10 bombas iguales, funcionando simultáneamente, pueden desaguar el agua del foso lleno en el transcurso de 12 h, en tanto que 15 bombas de ese mismo tipo, en 6 h. ¿Cuánto tiempo

es necesario para vaciar el agua del foso lleno empleando 25 bombas como las indicadas al trabajar ellas conjuntamente?

576. Dos fábricas, trabajando juntas, deben transformar cierta cantidad de materia prima. Si el rendimiento de la segunda fábrica aumentara el doble el tiempo necesario para que las fábricas realizaran el trabajo disminuiría en $\frac{2}{15}$ del tiempo que se requeriría para que la primera fábrica cumpliera toda la tarea. ¿En qué fábrica el rendimiento es más alto y cuántas veces, si sabemos que cada una de las fábricas transformó no menos de $\frac{1}{3}$ de todo el volumen de la materia prima?

577. Dos brigadas, trabajando juntas, cavaron una zanja en 2 días. Después de esto, ellas comenzaron a cavar otra zanja de la misma profundidad y anchura, pero de una longitud 5 veces mayor. Con esto, comenzó a trabajar una brigada y, a continuación, fue sustituida por la segunda que realizó una vez y media menos trabajo que la primera brigada. La segunda zanja fue acabada en 21 día. ¿En el transcurso de cuántos días hubiera podido cavar la segunda brigada la primera zanja, si sabemos que el volumen de trabajo realizado por la primera brigada por 1 día es mayor que el ejecutado por 1 día por la segunda brigada?

578. Un recipiente se llena de agua por 5 tubos. Con el primer tubo el recipiente se llena de agua en 40 minutos, con el segundo, tercero y cuarto tubos, funcionando al mismo tiempo, en 10 min, con el segundo, tercero y quinto tubos, trabajando conjuntamente, en 20 min y, por fin, con el quinto y cuarto, en 30 min. ¿Cuánto tiempo es necesario para llenar el recipiente si los 5 tubos trabajan juntos?

579. Tres líneas automáticas producen iguales artículos, pero tienen diferente rendimiento. El rendimiento de las tres líneas, al funcionar simultáneamente, es 1,5 veces mayor que el de la primera y segunda líneas al trabajar juntas. La tarea de turno para la primera línea, la segunda y la tercera líneas, trabajando conjuntamente, pueden cumplirla 4 h 48 min antes que la primera línea; esa misma tarea se cumple por la segunda línea 2 h más rápido que por la primera. Hallen el tiempo necesario para que la primera línea cumpla la tarea de turno.

580. Dos tractores aran una parcela dividida en dos partes iguales. Ambos tractores comenzaron a trabajar en su correspondiente parte al mismo tiempo. Pasadas 5 h después del momento cuando ellos, en conjunto, habían arado la mitad de toda la parcela, se aclaró que al primer tractor le queda por arar $\frac{1}{10}$ de su parte y al segundo, $\frac{2}{5}$ de la suya. ¿Cuánto tiempo necesitará el segundo tractor para arar el campo?

581. Tres excavadoras están ocupadas en la excavación de un foso. La diferencia entre los rendimientos de la primera y tercera excavadoras es 3 veces mayor que la diferencia entre los rendimientos de la tercera y segunda excavadora. La primera excavadora realiza $\frac{4}{5}$ de todo el trabajo, empleando para ello cierto tiempo. Igual intervalo de tiempo será necesario si, primero, la segunda excavadora realiza $\frac{1}{15}$ de toda la tarea y, a continuación, la tercera excavadora $\frac{9}{28}$ del trabajo restante. ¿Cuántas veces es mayor el rendimiento de la primera excavadora que el de la segunda?

582. Un mismo trabajo puede ser realizado por tres brigadas. En el transcurso de cierto tiempo, la primera brigada realiza $\frac{2}{3}$ de todo el trabajo. Ese mismo

tiempo será preciso si, primero, la tercera brigada hace $\frac{1}{3}$ de toda la tarea y, a continuación, la segunda brigada efectúa $\frac{9}{10}$ del trabajo restante El rendimiento de la tercera brigada es igual a la semisuma de los rendimientos de las brigadas primera y segunda. ?Cuántas veces es mayor el rendimiento de la segunda brigada que el de la tercera?

583. Trabajando juntas, dos brigadas de estuquistas estucaron en 6 días una casa de vivienda. En otra ocasión ellas estucaron un club y realizaron un volumen de trabajo tres veces mayor que al trabajar en la vivienda. En el cloub primero tralajó la primera brigada y, después, fue sustituida por la segunda que acabó el trabajo, con la particularidad de que la primera brigada realizó un trabajo dos veces mayor que la segunda. El club fue estucado por ella en 35 días. ¿En cuántos días podría haber estucado la primera brigada la casa de vivienda, si sabemos que la segunda brigada hubiera invertido para ello más de 14 días?

584. Una compra consta de tres objetos: A, B, C. Si A fuera 5, B, 2 y C,2,5 veces más barato, la compra costaría 8 rublos. Si el objeto A fuera 2, B, 4 y C, 3 veces más barato ,el precio de la compra sería 12 rublos ¿Cuánto cuesta toda la compra y qué es más caro, A o B?

585. Al mezclar una disolución al 40% de ácido con una disolución al 10% de ácido, se obtuvieron 800 g de una disolución al 20%. ¿Cuántos gramos de cada disolución fueron tomados con este objeto?

586. Tenemos 735 g de una disolución al 21,25% de yodo en alcohol. Hay que obtener una disolución de yodo al 10%. ¿Cuántos gramos de alcohol hay que añadir a la disolución que teníamos?

587. Hay acero de dos marcas, una de las cuales contiene el 5% de níquel y la otra, el 10%. ¿Cuántas toneladas de cada una de estas marcas de acero hay que tomar para producir una aleación que contenga el 8% de níquel, si en el segúndo trozo hay 4 t más de níquel que en primero?

588. En 500 kg de mineral hay cierta cantidad de hierro. Después de extraer de la mena 200 kg de impurezas, que contenían, por término medio, el 12,5 % de hierro, el porcentaje de hierro en el resto de la mena aumentó el 20%. ¿Cuánto hierro quedó en la mena?

589. Una mena contiene el 40% de impurezas, mientras que el metal fundido de ella, el 4% de ellas. ¿Qué cantidad de metal se obtendrá de 24 t de la mena?

590. De 40 t de mena se funden 20 t de metal con un contenido del 6% de impurezas. ¿Cuál es el por ciento de impurezas en la mena?

591. De 38 t de materia prima de segunda calidad, que contiene el 25% de impurezas, después de la tranformación se producen 30 t de materia prima de primera calidad. ¿Cuál es el por ciento de impurezas en la materia prima de primera calidad?

592. Los hongos frescos contienen el 90% de agua, los secos, el 12%. ¿Cuántos hongos secos se obtienen de 88 kg de hongos frescos?

593. Las abejas que transforman el néctar de las flores en miel, lo liberan de una considerable parte de agua. ¿Cuántos kilogramos de néctar han de transformar las abejas para obtener 1 kg de miel, si sabemos que el néctar contiene en 70% de agua y la miel que de él se obtiene, el 17%?

594. Dos aleaciones contienen dos metales. La primera aleación contiene los metales en una razón de 1 : 2, la segunda, de 3 : 2. ¿En qué razón hay que tomar partes de estas aleaciones, para obtener una nueva aleación con una razón de los metales de 8 : 7?

595. Hay dos disoluciones de un ácido de diferente concentración. El volumen de una de las disoluciones es de 4 l, el de la otra, 6 l. Si éstas se juntan, entonces obtenemos una disolución del ácido al 35%. Sin embargo, si se juntan iguales volúmenes de dichas disoluciones, obtenemos una disolu-

ción del ácido al 36%. ¿Cuántos litros de ácido contiene cada una de las disoluciones iniciales?

596. 40 kg de una disolución de sal se echaron en dos recipientes de forma que en el segundo recipiente resultó haber 2 kg más de sal pura que en el primero. Si añadimos al segundo recipiente 1 kg de sal, la cantidad de ésta en él será dos veces mayor que en el primer recipiente. Hallen la masa de la disolución contenida en el primer recipiente.

597. Tenemos tres lingotes. La masa del primero es de 5 kg, la del segundo, de 3 kg y cada uno de ellos contiene el 30% de cobre. Si el primer lingote se funde junto con el tercero, obtenemos un lingote que contiene el 56% de cobre, mientras que al fundir conjuntamente los lingotes segundo y tercero, se obtiene un lingote que contiene el 60%. Hallen la masa del tercer lingote y el porcentaje de cobre en él.

598. Hay dos lingotes de oro con plata. El porcentaje de oro en el primer lingote es 2,5 veces mayor que en el segundo. Si fundimos juntos ambos lingotes, se obtiene un lingote en el que habrá el 40% de oro. ¿Cuántas veces la masa del primer lingote es mayor que la del segundo, si se conoce que al fundir partes de igual masa de los lingotes primero y segundo se obtiene un lingote que contiene el 35% de oro?

599. Una aleación de cobre y plata contiene 2 kg de cobre más que de plata. Si añadimos a la aleación $\frac{9}{10}$ de la cantidad de plata que ella contiene, el porcentaje de plata en la nueva aleación será igual al porcentaje de cobre en la aleación inicial. Hallen la masa de ésta.

600. Hay que tomar varios litros de un líquido a la temperatura a° y otra cantidad de ese mismo líquido, pero a la temperatura b°, para obtener la temperatura c° de la mezcla. No obstante, del segundo líquido se tomó tanto como se suponía tomar del primero y viceversa. ¿Qué temperatura de la mezcla se obtuvo?

601. Un recipiente de 12 l de capacidad está lleno de un ácido. De él se vierte cierta cantidad de ácido al segundo recipiente de la misma capacidad y éste se rellena de agua. A continuación, el primer recipiente se llena con la mezcla del segundo. Después de esto, del primer recipiente se echan 4 l al segundo, tras lo cual en ambos recipientes la cantidad de ácido puro (en las disoluciones) resulta ser igual. ¿Cuanto ácido fue vertido inicialmente del primer recipiente al segundo?

602. En un recipiente con agua se echaron 6 l de una disolución de alcohol al 64% y, a continuación, tras realizar el mezclado completo, se vertieron 6 l de la disolución obtenida. Semejante operación se efectúa 3 veces. ¿Qué cantidad de agua había inicialmente en el recipiente, si la concentración definitiva del alcohol se hizo igual al 37%?

603. Un trozo de 6 kg de masa de una aleación contiene cobre. El trozo de otra aleación de 8 kg de masa contiene cobre en un procentaje dos veces menor que en el primer trozo. De éste se ha cortado cierta parte y del segundo trozo se corta una parte que por su masa es dos veces mayor que la cortada de primer trozo. Cada una de estas partes se funden con el resto del otro trozo, después de lo cual se obtuvieron dos nuevas aleaciones con igual porcentaje de cobre. ¿Cuál es la masa de cada una de las partes cortadas inicialmente de os trozos?

604. De un recipiente lleno de glicerina se han vertido 2 l de ésta y a la glicerina restante añadieron 2 l de agua. Después del mezclado se sacaron 2 l de la mezcla y añadieron 2 l de agua. Por fin, se realizó de nuevo la agitación de la mezcla y de ella se sacaron 2 y añadieron 2 l de agua. Como resultado de estas operaciones el volumen de agua en el recipiente es 3 l mayor que el volumen de glicerina que en él queda. ¿Cuántos litros de glicerina y de agua quedaron en el recipiente a consecuencia de la operaciones realizadas?

605. De dos depósitos uno está lleno de glicerina y el segundo, de agua. Se toman

dos cucharones de tres litros. Con el primer cucharón se saca el contenido del primer depósito y, con el segundo, el contenido del segundo depósito, después de lo cual el primer cucharón se vierte al segundo depósito y el segundo cucharón, al primer depósito. A continuación, tras realizar el mezclado, esta operación se realizó una vez más y, como resultado, la glicerina pura ocupó la mitad del primer depósito. Hallen los volúmenes de los depósitos, si se conoce que su volumen sumario es 10 veces mayor que el del primer depósito.

606. Después de fundir dos trozos de arrabio de igual masa con diferente contenido de cromo, fue obtenida una aleación que contenía 12 kg de cromo. Si la masa del primer trozo hubiera sido dos veces mayor, en la aleación habría 16 kg de cromo. Se sabe que el contenido de cromo en el primer trozo era el 5% menor que en el segundo. Hallen el porcentaje de cromo en cada uno de los trozos de arrabio.

607. Tenemos tres aleaciones. La primera contiene el 60% de aluminio, el 15% de cobre y el 25% de magnesio, la segunda, el 30% de cobre y el 70% de magnesio, la tercera, el 45% de aluminio y el 55% de magnesio. Es preciso producir de ellas una aleación con un contenido del 20% de cobre. ¿Qué porcentaje mínimo y máximo de aluminio puede haber en la nueva aleación?

608. Tenemos tres aleaciones. La primera aleación contiene el 45% de estaño y el 55% de plomo, la segunda el 10% de bismuto, el 40% de estaño y el 50% de plomo, la tercera, el 30% de bismuto y el 70% de plomo. Es necesario elaborar de ellas una nueva aleación que contenga el 15% de bismuto. ¿Qué porcentaje mínimo y máximo de plomo puede haber en la nueva aleación?

§ 12. Ecuaciones irracionales

Llevan el nombre de *irracionales* aquellas ecuaciones en las que la variable se encuentra bajo el signo del radical o bien bajo el signo de elevación a una potencia fraccionaria. Semejantes ecuaciones se consideran sobre el campo de los números reales. Al resolver las ecuaciones irracionales se hace uso de dos métodos fundamentales: 1) elevación de ambos miembros de la ecuación a una misma potencia; 2) introducción de nuevas variables (auxiliares). Pero, en ciertas ocasiones, es preciso emplear, asimismo, procedimientos artificiales de resolución de las ecuaciones irracionales. Al elevar ambos miembros de la ecuación a una misma potencia, hay que tener en cuenta que si n es un número impar, las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $(f(x))^n = (g(x))^n$ son equivalentes; si n es un número par, la ecuación $(f(x))^n = (g(x))^n$ es la consecuencia de la ecuación $f(x) = g(x)$, es decir, al pasar de la ecuación $f(x) = g(x)$ a la $(f(x))^n = (g(x))^n$ pueden surgir raíces extrañas. P.ej., la ecuación $x - 1 = 3$ tiene una raíz $x = 4$, mientras que la ecuación $(x - 1)^2 = 3^2$ tiene dos raíces: $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, una de las cuales (precisamente $x = -2$) es extraña para la ecuación $x - 1 = 3$

Al resolver ecuaciones irracionales, con frecuencia se emplea la fórmula $(\sqrt[n]{f(x)})^n = f(x)$, cuyo empleo cuando n es par puede conducir a la ampliación del campo de definición de la ecuación (para $(\sqrt[n]{f(x)})^n$ con n par es natural la acotación $f(x) \geqslant 0$, mientras que

al sustituir $(\sqrt[n]{f(x)})^n$ por $f(x)$, dicha acotación desaparece).

Por estas (y otras) causas, al resolver ecuaciones irracionales, en la mayoría de los casos, es necesaria la comprobación de las resoluciones halladas. En función del tipo de las resoluciones obtenidas (simples o complejas), así como en dependencia del procedimiento de resolución de la ecuación, puede ser elegido uno u otro procedimiento de verificación.

1. Resolución de ecuaciones irracionales según el método de elevación de ambos miembros de la ecuación a la misma potencia.

EJEMPLO 1. Resolvamos la ecuación

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}=6. \qquad (1)$$

SOLUCIÓN Elevemos ambos miembros de la ecuación al cuadrado:

$$x-1+2\sqrt{(x-1)(2x+6)}+2x+6=36$$

y, a continuación, $2\sqrt{2x^2+4x-6}=-3x+31$.

Después de elevar al cuadrado la última ecuación, obtenemos:

$$8x^2+16x-24=9x^2-186x+961$$

y, seguidamente, $x^2-202x+985=0$, de donde $x_1=5$, $x_2=197$.

VERIFICACIÓN. Las raíces halladas son fácil de verificar poniéndolas directamente en la ecuación (1).

1) $\sqrt{x_1-1}+\sqrt{2x_1+6}=\sqrt{5-1}+\sqrt{2\cdot 5+6}=6$. Así, pues, $x_1=5$ es la raíz de la ecuación prefijada,

2) $\sqrt{x_2-1}+\sqrt{2x_2+6}=\sqrt{197-1}+\sqrt{2\cdot 197+6}\neq 6$, es decir, $x_2=197$ es una raíz extraña. De modo, sólo $x=5$ es la raíz de la ecuación dada.

EJEMPLO 2. Resolvamos la ecuación

$$\sqrt{x^2+x-5}+\sqrt{x^2+8x-4}=5. \qquad (2)$$

SOLUCIÓN. Transformemos la ecuación (2) a la forma

$$\sqrt{x^2+x-5}=5-\sqrt{x^2+8x-4}$$

y elevemos al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$x^2+x-5=25-10\sqrt{x^2+8x-4}+x^2+8x-4.$$

Separemos la raíz y reduzcamos los términos semejantes:

$$10\sqrt{x^2+8x-4}=7x+26, \qquad (3)$$

elevemos al cuadrado ambos miembros de la ecuación (3):

$$100(x^2+8x-4)=(7x+26)^2 \text{ o bien}$$

$$51x^2+436x-1076=0.$$

De esta última ecuación hallamos: $x_1=2$, $x_2=-\frac{538}{51}$.

VERIFICACIÓN. La primera de las raíces halladas es fácil de verificar poniéndola en la ecuación inicial. Semejante prueba muestra que $x_1 = 2$ es la raíz de la ecuación (2). El intento de comprobar de este mismo modo la segunda raíz conduce a laboriosos cálculos. Pero podemos operar de otra manera. Aclaremos si $x_2 = -\frac{538}{31}$ es la resolución de la ecuación (3). Notamos que con este valor el primer miembro de (3) es positivo y el segundo, negativo. O sea, $x_2 = -\frac{538}{51}$ no es la raíz de la ecuación (3). Pero ésta es el corolario de la ecuación (2), entonces, aún menos, x_2 no es la raíz de (2). Así, pues, la raíz de la ecuación (2) es $x = 2$.

EJEMPLO 3. Resolvamos la ecuación $\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{2x-6}=2$.

SOLUCIÓN. Después de separar $\sqrt[3]{2x-6}$, obtenemos: $\sqrt[3]{2x-6}=\sqrt{x+1}-2$.

Elevamos ambos miembros de esta ecuación al cubo:

$$2x-6=(x+1)\sqrt{x+1}-6(x+1)+12\sqrt{x+1}-8.$$

Después de reducir los términos semejantes y separar la raíz, obtenemos la ecuación $(x+13)\sqrt{x+1}=8(x+1)$, de donde $(x+13)^2(x+1)=64(x+1)^2$ y, seguidamente, $(x+1)\times((x+13)^2-64(x+1))=0$, o bien $(x+1)(x^2-38x+105)=0$.

Así, pues, el problema se reduce a la resolución del conjunto:

$$x+1=0;\ x^2-38x+105=0,$$

de donde hallamos $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_3=35$.

VERIFICACIÓN. Poniendo los valores hallados de x en la ecuación dada nos cercioramos de que todos ellos son sus raíces.

EJEMPLO 4. Resolvamos la ecuación

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}. \qquad (4)$$

SOLUCIÓN. Elevemos al cubo ambos miembros de la ecuación (4), haciendo uso de la fórmula del cubo de la suma de dos números ligeramente variada, o sea de la fórmula $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$. Obtenemos:

$$x+2x-3+3\sqrt[3]{x(2x-3)}(\sqrt[3]{x}+\sqrt{2x-3}=12(x-1). \qquad (5)$$

Empleando la ecuación (4), sustituyamos la expresión $\sqrt[3]{x}+$ $+\sqrt[3]{2x-3}$ por la expresión $\sqrt[3]{12(x-1)}$. Obtenemos:

$$3x-3+3\sqrt[3]{x(2x-3)}\sqrt[3]{12(x-1)}=12(x-1) \qquad (6)$$

o bien $\sqrt[3]{x(2x-3)12(x-1)}=3(x-1)$.

Elevemos al cubo ambos miembros de la última ecuación:

$$12x(2x-3)(x-1)=27(x-1)^3,$$

y, a continuación, $(x-1)(4x(2x-3)-9(x-1)^2)=0$, de donde hallamos: $x_1=1$, $x_{2,3}=3$.

VERIFICACION. Poniendo los valores hallados de x en la ecuación (4) nos cercioramos que ellos la satisfacen.

OBSERVACIÓN. Como al resolver la ecuación (4) empleamos la elevación de ambos miembros de la ecuación al cubo y, como sabemos, la elevación a una potencia impar no viola la equivalencia de la ecuación, al parecer las soluciones halladas pueden no ser probadas. Pero la cosa no es así. Al pasar de la ecuación (5) a la (6) sustituimos la expresión $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}$ por $\sqrt[3]{12(x-1)}$. Está claro, que toda raíz de la ecuación (5) es, asimismo, raíz de la (6), mientras que lo inverso, por regla, no es cierto. Esto significa, que la ecuación (6) es el corolario de la (5), por lo que la prueba es necesaria. El siguiente ejemplo confirma esta idea.

EJEMPLO 5. Resolvamos la ecuación $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$.

SOLUCIÓN. Consecutivamente tenemos:

$$(2x-1)+(x-1)+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\left(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}\right)=1,$$
$$3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}=3-3x,\quad (2x-1)(x-1)=(1-x)^3,$$
$$(x-1)((2x-1)+(x-1)^2)=0,\ \text{de donde}\ x_1=1,\ x_{2,3}=0.$$

VERIFICACIÓN. Poniendo los valores hallados de x en la ecuación dada nos cercioramos de que el valor $x_2=0$ no satisface la ecuación. La ecuación inicial tiene una sola raíz $x=1$.

2. Método de introducción de nuevas variables.

EJEMPLO 6. Resolvamos la ecuación

$$x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=1,5(x+4). \qquad (7)$$

SOLUCIÓN. La separación de la raíz y la elevación al cuadrado de ambos miembros de la ecuación (7) nos conduciría a una voluminosa ecuación. Pero si observamos con atención la ecuación (7), podremos advertir que ella se reduce con facilidad a la forma cuadrática. En efecto, al multiplicar ambos miembros de la ecuación por 2, obtenemos:

$$2x^2+6-2\sqrt{2x^2-3x+2}=3x+12$$

y, a continuación,

$$2x^2-3x+2-2\sqrt{2x^2-3x+2}-8=0.$$

Haciendo $y=\sqrt{2x^2-3x+2}$, obtenemos: $y^2-2y-8=0$, de donde $y_1=4$, $y_2=-2$. O sea, la ecuación (7) es equivalente al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\sqrt{2x^2-3x+2}=4;\quad \sqrt{2x^2-3x+2}=-2.$$

De la primera ecuación de este conjunto, hallamos: $x_1=\frac{7}{2}$, $x_2=-2$. La segunda ecuación no tiene raíces.

VERIFICACIÓN. Como la ecuación (7) es equivalente a la ecuación $\sqrt{2x^2-3x+2}=4$ (ya que la segunda ecuación del conjunto no tenía soluciones), los valores hallados pueden verificarse sustituyéndolos en la ecuación $\sqrt{2x^2-3x+2}=4$. Esta operación muestra que ambos valores de x son la raíces de la indicada ecuación y, por lo tanto, de la (7).

EJEMPLO 7. Resolvamos la ecuación

$$2x-5+2\sqrt{x^2-5x}+2\sqrt{x-5}+2\sqrt{x}=48. \qquad (8)$$

SOLUCIÓN. El campo de definición de la ecuación es $x\geqslant 5$. Con esta condición, tenemos $x\geqslant 0$ y $x-5\geqslant 0$, por lo que

$$\sqrt{x^2-5x}=\sqrt{x(x-5)}=\sqrt{x}\sqrt{x-5}.$$

Como $2x=x+x$, podemos reescribir la ecuación (8) de la siguiente forma:

$$x+x-5+2\sqrt{x}\sqrt{x-5}+2\sqrt{x-5}+2\sqrt{x}-48=0$$

o bien $(\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}\sqrt{x-5}+(\sqrt{x-5})^2+2(\sqrt{x-5}+\sqrt{x})-48=0$,

es decir, $(\sqrt{x-5}+\sqrt{x})^2+2(\sqrt{x-5}+\sqrt{x})-48=0.$

Haciendo $y=\sqrt{x-5}+\sqrt{x}$ obtenemos la ecuación cuadrática $y^2+2y-48=0$, de la que hallamos: $y_1=6$, $y_2=-8$. Así, pues, el problema se redujo a la resolución del conjunto de ecuaciones:

$$\sqrt{x-5}+\sqrt{x}=6;\quad \sqrt{x-5}+\sqrt{x}=-8.$$

De la primera ecuación del conjunto hallamos $x=\left(\frac{41}{12}\right)^2$, la segunda ecuación del conjunto no tiene soluciones.

VERIFICACIÓN. Es fácil mostrar que $x=\left(\frac{41}{12}\right)^2$ es la raíz de

ecuación $\sqrt{x-5}+\sqrt{x}=6$. Pero esta ecuación es equivalente a la ecuación (8), por lo que $x=\left(\frac{41}{12}\right)^2$ es también la raíz de la ecuación (8).

A veces, al resolver ecuaciones irracionales es cómodo introducir dos nuevas variables auxiliares.

EJEMPLO 8. Resolvamos la ecuación

$$\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{15+x}=2. \tag{9}$$

SOLUCIÓN. Hagamos $\begin{cases} u=\sqrt[4]{1-x} \\ v=\sqrt[4]{15+x}. \end{cases}$

Entonces, la ecuación (9) toma la forma $u+v=2$. Pero con el fin de hallar los valores de las nuevas variables, es insuficiente tener una ecuación. Elevando a la cuarta potencia ambos miembros de las dos ecuaciones del sistema, obtenemos: $\begin{cases} u^4=1-x \\ v^4=15+x. \end{cases}$

Sumemos las ecuaciones del sistema: $u^4+v^4=16$.

Así, pues, para hallar u, v tenemos el siguiente sistema simétrico de ecuaciones:

$$\begin{cases} u+v=2 \\ u^4+v^4=16. \end{cases}$$

Después de resolverlo (véase la pág. 79), hallamos (limitándonos a las soluciones reales):

$$\begin{cases} u_1=0 \\ v_1=2 \end{cases}; \quad \begin{cases} u_2=2 \\ v_2=0. \end{cases}$$

El problema se ha reducido a la resolución del conjunto de sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{1-x}=0 \\ \sqrt[4]{15+x}=2 \end{cases}; \quad \begin{cases} \sqrt[4]{1-x}=2 \\ \sqrt[4]{15+x}=0. \end{cases}$$

Resolviendo este conjunto, hallamos: $x_1=1$, $x_2=-15$.

LA VERIFICACIÓN (su realización se efectúa con la mayor facilidad poniendo los valores hallados en la ecuación inicial) nos persuade que los dos valores hallados de x son las raíces de la ecuación inicial.

OBSERVACIÓN. Este procedimiento puede también ser utilizado al resolver algunas de las ecuaciones analizadas más arriba. P. ej., al resolver la ecuación $\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{2x-6} = 2$ (véase el ejemplo 3, pág. 113), se puede hacer $\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \\ v = \sqrt[3]{2x+6} \end{cases}$ y, entonces, llegaríamos al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} u - v = 2 \\ 2u^2 - v^3 = 8. \end{cases}$$

EJEMPLO 9. Resolvamos la ecuación

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x}} - \sqrt{x\sqrt{x^2+28^2}-x^2} = 3. \qquad (10)$$

SOLUCIÓN. Haciendo

$$\begin{cases} u = \sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x}} \\ v = \sqrt{x\sqrt{x^2+28^2}-x^2} \end{cases} \qquad (11)$$

llegamos a la ecuación $u - v = 3$. Multipliquemos entre sí los segundos miembros de las ecuaciones del sistema (11):

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x}}\sqrt{x\sqrt{x^2+28^2}-x^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x} \cdot x\left(\sqrt{x^2+28^2}-x\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{x^2+28^2}\right)^2 - x^2} = 28.$$

El resultado obtenido conduce a otra ecuación con relación a las nuevas variables: $uv = 28$. Habiendo resuelto el sistema $\begin{cases} u - v = 3 \\ u \cdot v = 28, \end{cases}$

hallamos:

$$\begin{cases} u_1 = 7 \\ v_1 = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} u_1 = -4 \\ v_2 = -7. \end{cases}$$

Así, pues, llegamos a un conjunto de sistemas de ecuaciones. De él sólo escribamos el sistema que corresponde a los valores positivos de u_1 y v_1 (el sistema que corresponde a los valores negativos de u_2, v_2, de antemano no tiene soluciones, por lo que es omitido):

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x}} = 7 \\ \sqrt{x\sqrt{x^2+28^2}-x^2} = 4. \end{cases} \qquad (12)$$

Resolvamos la segunda ecuación del sistema (12). Elevemos al cuadrado sus ambos miembros: $x\sqrt{x^2+28^2}-x^2 = 16$ y, a continuación,

$$x\sqrt{x^2+28^2}=x^2+16. \qquad (13)$$

Ahora, elevemos al cuadrado ambos miembros de la ecuación (13):

$$x^2(x^2+28^2)=(x^2+16)^2 \qquad (14)$$

y, más adelante, $752x^2-256=0$.

De esta última ecuación hallamos: $x_1=\frac{4\sqrt{47}}{47}$, $x_2=-\frac{4\sqrt{47}}{47}$.

VERIFICACIÓN. Está claro que x_2 no satisface la ecuación (13) y, por lo tanto, asimismo, la segunda ecuación del sistema (12). Probemos x_1. Como con $x>0$ las ecuaciones (14), (13) y la segunda ecuación del sistema (12) son equivalentes, $x=\frac{4\sqrt{47}}{47}$ es la solución de la segunda ecuación del sistema (12). Ahora, debemos cerciorarnos que el valor hallado de x_1 satisface también la primera ecuación del sistema (12) (sólo en este caso podemos considerar este valor como solución del sistema (12)). Reduzcamos dicha ecuación a la equivalente, pero más sencilla. Tenemos:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x}}=7,\ \sqrt{x^2+28^2}+x=49x,\ \sqrt{x^2+28^2}=48x,$$

$$x^2+28^2=48^2x^2,\ (48^2-1)x^2=28^2,$$

de donde, $x^2=\frac{16}{47}$.

El valor de x_1 satisface la última ecuación y, simultáneamente, la primera ecuación del sistema (12).

Así, pues, $x=\frac{4\sqrt{47}}{47}$ es la solución del sistema (12) y, por consiguiente, de la ecuación (10).

EJEMPLO 10. Resolvamos la ecuación

$$\sqrt[5]{(x-2)(x-32)}-\sqrt[4]{(x-1)(x-33)}=1. \qquad (15)$$

SOLUCIÓN. Hagamos

$$\begin{cases} u=\sqrt[5]{(x-2)(x-32)} \\ v=\sqrt[4]{(x-1)(x-33)}. \end{cases} \qquad (16)$$

Entonces la ecuación (15) toma la forma: $u-v=1$. Para obtener la segunda ecuación con relación a las nuevas variables u, v

elevamos a la quinta potencia ambos miembros de la primera ecuación del sistema (16) y la segunda, a la cuarta potencia. Obtenemos:

$$\begin{cases} u^5 = x^2 - 34x + 64 \\ v^4 = x^2 - 34x + 33, \end{cases}$$

de donde $u^5 - v^4 = 31$. Así, pues, para hallar u, v tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} u - v = 1 \\ u^5 - v^4 = 31 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} v = u - 1 \\ u^5 - (u-1)^4 = 31, \end{cases}$$

de donde

$$\begin{cases} v = u - 1 \\ u^5 - u^4 + 4u^3 - 6u^2 + 4u - 32 = 0. \end{cases} \tag{17}$$

De la segunda ecuación del sistema (17) hallamos $u_1 = 2$. Después de dividir el polinomio $u^5 - u^4 + 4u^3 - 6u^2 + 4u - 32$ por el binomio $u - 2$, en el cociente obtenemos $u^4 + u^3 + 6u^2 + 6u + 16$.

Así, pues, el sistema (17) es equivalente al conjunto de sistemas:

$$\begin{cases} v = u - 1 \\ u - 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} v = u - 1 \\ u^4 + u^3 + 6u^2 + 6u + 16 = 0. \end{cases}$$

Del primer sistema hallamos: $u_1 = 2$, $v_1 = 1$.

El segundo sistema es más complicado. Durante su resolución hay que tener en cuenta lo siguiente. Como $\sqrt[4]{(x-1)(x-33)} = v$, entonces $v \geqslant 0$.

Ya que $u - v = 1$, $u = v + 1$ y, por consiguiente, $u \geqslant 1$. Está claro que la ecuación

$$u^4 + u^3 + 6u^2 + 6u + 16 = 0$$

no tiene soluciones que satisfagan la desigualdad $u \geqslant 1$.

Así, pues $\begin{cases} u_1 = 2 \\ v_1 = 1 \end{cases}$ es la única solución del sistema (17) y sólo nos queda resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \sqrt[5]{(x-2)(x-32)} = 2 \\ \sqrt[4]{(x-1)(x-33)} = 1. \end{cases}$$

Tenemos: $\begin{cases} \sqrt[5]{x^2 - 34x + 64} = 2 \\ \sqrt[4]{x^2 - 34x + 33} = 1. \end{cases}$

Hagamos $y = x^2 - 34x + 33$, entonces el sistema adquiere la forma:

$$\begin{cases} \sqrt[5]{y+31} = 2 \\ \sqrt[4]{y} = 1. \end{cases}$$

De este sistema hallamos: $y = 1$. Entonces, $x^2 - 34x + 33 = 1$, de donde $x_{1,2} = 17 \pm \sqrt{257}$.

VERIFICACIÓN. Al analizar las transformaciones realizadas en diversas etapas de la resolución (todas ellas son equivalentes, de lo que pueden cerciorarse por su cuenta), llegamos a la conclusión de que los valores hallados de x son las raíces de la ecuación (15).

3. Métodos artificiales para resolver ecuaciones irracionales.

EJEMPLO 11. Resolvamos la ecuación

$$\sqrt{2x^2+3x+5} + \sqrt{2x^2-3x+5} = 3x. \tag{18}$$

SOLUCIÓN. Multipliquemos ambos miembros de la ecuación por la expresión $\varphi(x) = \sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5}$, conjugada a la expresión $\sqrt{2x^2+3x+5} + \sqrt{2x^2-3x+5}$).

Como $(\sqrt{2x^2+3x+5} + \sqrt{2x^2-3x+5}) \cdot (\sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5}) = (2x^2+3x+5) - (2x^2-3x+5) = 6x$, la ecuación (18) toma la forma:

$$6x = 3x(\sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5})$$

o bien $x(\sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5} - 2) = 0.$ (19)

Es fácil notar que $x_1 = 0$ es una de las raíces de la ecuación (19). Nos queda por resolver la ecuación

$$\sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5} = 2. \tag{20}$$

Después de sumar las ecuaciones (18) y (20), llegaremos a la ecuación corolario

$$2\sqrt{2x^2+3x+5} = 3x + 2. \tag{21}$$

Resolviendo la ecuación (21) según el método de elevación al cuadrado, obtenemos: $8x^2 + 12x + 20 = 9x^2 + 12x + 4$ y, seguidamente, $x^2 = 16$, de donde $x_2 = 4$, $x_3 = -4$.

VERIFICACIÓN. Poniendo, una tras otra, en la ecuación (18) los valores hallados $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = -4$, nos cercioramos de que dicha ecuación sólo se satisface con el valor $x_2 = 4$. Así, pues, $x = 4$ es la única raíz de la ecuación (18).

EJEMPLO 12. Resolvamos la ecuación

$$\sqrt[4]{x-1} + 2\sqrt[3]{3x+2} = 4 + \sqrt{3-x}. \tag{22}$$

SOLUCIÓN. En el caso dado, ninguno de los procedimientos indicados más arriba proporciona exitoso resultado. Intentemos hallar, según el método de pruebas, alguna solución de la ecuación. El campo de definición de ésta se prefija con el sistema de desigualdades: $\begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ 3-x \geqslant 0 \end{cases}$, de donde obtenemos: $1 \leqslant x \leqslant 3$. Es decir, la solución debe ser buscada sólo en este intervalo. Probando los valores enteros de x en ese intervalo, hallamos que $x=2$ es la raíz de la ecuación dada. Si, ahora, demostramos que la ecuación inicial no tiene otras raíces, de este modo la solución de la ecuación será terminada.

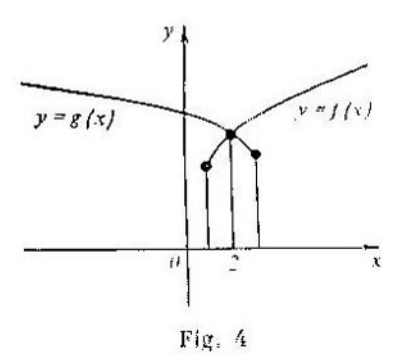


Fig. 4

En el segmento [1; 3] la función $f(x) = \sqrt[4]{x-1} + 2\sqrt[3]{3x+2}$ es creciente, mientras que la función $g(x) = 4 + \sqrt{3-x}$, decreciente. Pero, en este caso, si la ecuación $f(x) = g(x)$ tiene raíz, ésta será sólo una (fig. 4). Así, pues, $x = 2$ es la única raíz de la ecuación (22).

4. Sistemas de ecuaciones irracionales.

EJEMPLO 13. Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}} + \sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}} = 2 \\ 4y^2 - 1 = 3y(x-1). \end{cases} \tag{23}$$

SOLUCIÓN. Hagamos $u = \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}$. Entonces, la primera ecuación del sistema toma la forma: $u + \dfrac{1}{u} = 2$, de donde hallamos: $u = 1$.

De esta forma, la solución del sistema (23) se reduce a resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}} = 1 \\ 4y^2 - 1 = 3y(x-1). \end{cases} \tag{24}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la primera ecuación del sistema (24) y eliminando el denominador, hallamos el sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 2x \\ 4y^2 - 1 = 3y(x-1), \end{cases} \tag{25}$$

del que obtenemos: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$

VERIFICACIÓN. El sistema (23) es equivalente al (24). Como ambos miembros de la primera ecuación del sistema (24) no son negativos, entonces con $x \neq 0$ el sistema (24) es equivalente al (25). De este modo, las soluciones del sistema (25) también lo son del (23). Así, pues, las soluciones del sistema (23) son los pares (2; 1) y $(1; \frac{1}{2})$.

EJEMPLO 14. Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2\sqrt{x-y}+\sqrt[4]{x+2y}=4 \\ \sqrt[8]{(x-y)^4(x+2y)^2}=2. \end{cases}$$

SOLUCIÓN. Haciendo $\begin{cases} u=\sqrt{x-y} \\ v=\sqrt[4]{x+2y} \end{cases}$ obtenemos el sistema

$\begin{cases} 2u+v=4 \\ uv=2, \end{cases}$ del cual hallamos: $u=1$, $v=2$.

Así, pues, el problema se reduce a resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x-y}=1 \\ \sqrt[4]{x+2y}=2 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x-y=1 \\ x+2y=16, \end{cases}$$

de donde $x=6$, $y=5$.

Es fácil comprobar que la solución hallada del último sistema es también la del sistema inicial. Así, pues, el par (6; 5) es la solución del sistema dado de ecuaciones.

EJERCICIOS

Resuelvan las siguientes ecuaciones:

609. $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}=3.$ 610. $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}.$

611. $\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x+6}=\sqrt{12x+25}.$

612. $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}+\sqrt{x+9}-\sqrt{x+4}=0.$

613. $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1.$ 614. $(1+x^3)\sqrt{1+x^2}=x^2-1.$

615. $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-8}=3.$ 616. $1-x=\sqrt{1-\sqrt{4x^2-7x^4}}.$

617. $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1.$ 618. $\sqrt{7+\sqrt[3]{x^2+7}}=3.$

619. $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}.$

620. $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7.$

621. $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1.$

622. $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3.$

623. $x^2+\sqrt{x^2+20}=22.$ 624. $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6.$

625. $\sqrt{x\sqrt[6]{x}}-\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=56.$

626. $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\frac{x+3}{5-x}}=2.$ 627. $\sqrt[4]{\frac{2-x}{3+x}}+\sqrt[4]{\frac{3+x}{2-x}}=2.$

628. $x\sqrt{x^2+15}-\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2+15}=2.$

629. $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}.$

630. $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6.$

631. $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7.$

632. $x^2-3x-5\sqrt{9x^2+x-2}=2,75-\frac{28}{9}x.$

633. $x+\sqrt[3]{x}-2=0.$

634. $x-4\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+6=0.$ 635. $4x-3\sqrt[3]{x}-1=0.$

636. $x^{10}-x^5-2\sqrt{x^6}+2=0.$

637. $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}.$

638. $\sqrt{x^2+x+7}+\sqrt{x^2+x+2}=\sqrt{3x^2+3x+19}.$

639. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1.$

640. $\sqrt{5-\sqrt{x+1+\sqrt{2x^2+x+3}}}=1.$

641. $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4.$

642. $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}.$

643. $\sqrt[3]{2x(4x^2+3)-1-12x^3}+x=x^2-11.$

644. $\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{-x^2+3x-2}=\sqrt{x^2-x}.$

645. $\sqrt{x^2-x-1}+\sqrt{x^2+x+3}=\sqrt{2x^2+8}$ (hallen las soluciones positivas).

646. $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}=\sqrt{x^2-3x+2}.$

647. $\sqrt[3]{x+24}+\sqrt{12-x}=6.$

648. $\sqrt[6]{1,5}\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}=0.$

649. $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0.$ 650. $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x-1}=1.$

651. $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}.$ 652. $\sqrt[3]{x+7}+\sqrt[3]{28-x}=5.$

653. $\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2+18}=5.$

654. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0.$

655. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}.$

656. $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4.$

657. $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{54-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{18}.$

658. $\sqrt[4]{78+\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}}-\sqrt[4]{84-\sqrt[3]{30-\sqrt{x}}}=0.$

659. $\sqrt{\frac{20+x}{x}}+\sqrt{\frac{20-x}{x}}=\sqrt{6}.$ 660. $\sqrt{x^3+x^2-1}+\sqrt{x^3+x^2+2}=3.$

661. $x\sqrt[3]{35-x^3}\left(x+\sqrt[3]{35-x^3}\right)=30.$

662. $x+\sqrt{17-x^2}+x\sqrt{17-x^2}=9.$

663. $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{6-x}=\sqrt{2}.$ 664. $\sqrt[4]{77+x}+\sqrt[4]{20-x}=5.$

665. $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$.

666. $\sqrt{6-x}+\sqrt{x-2}+2\sqrt[4]{(6-x)(x-2)}=2$.

667. $\sqrt[5]{33-x}+\sqrt[5]{x}=3$.

668. $\sqrt[5]{(x-2)(x-32)}-\sqrt[5]{(x-1)(x-33)}=1$.

669. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+66^2}+x}{x}}-\sqrt{x\sqrt{x^2+66}-x^2}=5$.

670. $4\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=x$.

671. $x+\sqrt{x}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+2x}=3$.

672. $\sqrt{x^3-4x^2+x+15}+\sqrt{x^3-4x^2-x+13}=x+1$.

673. $\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-3)(x-4)}=\sqrt{2}$.

674. $\sqrt[3]{4-4x+x^2}+\sqrt[3]{49+14x+x^2}=3+\sqrt[3]{14-5x-x^2}$.

675. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x$.

676. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$.

677. $\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6$.

678. $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x$.

Resuelvan los siguientes sistemas de ecuaciones:

679. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{y}{x}}-2\sqrt{\dfrac{x}{y}}=1\\ \sqrt{5x+y}+\sqrt{5x-y}=4.\end{cases}$

680. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x^3}{y}}-\sqrt{\dfrac{y^3}{x}}=\dfrac{65}{6}\\ x-y=5.\end{cases}$

681. $\begin{cases}y^2+\sqrt{3y^2-2x+3}=\dfrac{2}{3}\,x+5\\ 3x-2y=5.\end{cases}$

682. $\begin{cases}5\sqrt[3]{x-2y}+3\sqrt[3]{x+y}=13\\ 3\sqrt[3]{x-2y}-4\sqrt[3]{x+y}=2.\end{cases}$

683. $\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{2x+y}}{y}+\dfrac{\sqrt[3]{2x+y}}{2x}=\dfrac{81}{182}\\ \dfrac{\sqrt[3]{2x-y}}{y}-\dfrac{\sqrt[3]{2x-y}}{2x}=\dfrac{1}{182}.\end{cases}$

684. $\begin{cases}\sqrt{2x-y+11}-\sqrt{3x+y-9}=3\\ \sqrt[4]{2x-y+11}+\sqrt[4]{3x+y-9}=3.\end{cases}$

685. $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6\\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2}=8.\end{cases}$

686. $\begin{cases}x+y+\sqrt{xy}=14\\ x^2+y^2+xy=84.\end{cases}$

687. $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=\dfrac{4}{3}\\ xy=9.\end{cases}$

688. $\begin{cases}x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6\\ x^2y+y^2x=20.\end{cases}$

689. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3\\ xy=8.\end{cases}$

690. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3 \\ \sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3. \end{cases}$

691. $\begin{cases} x^2+x\sqrt[3]{xy^2}=80 \\ y^2+y\sqrt[3]{x^2y}=5. \end{cases}$

692. $\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{y+1}{x}}-2\sqrt[3]{\dfrac{x}{y+1}}=1 \\ \sqrt{x+y+1}+\sqrt{x-y+10}=5. \end{cases}$

693. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y+1}=1 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y}=1. \end{cases}$

694. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y} \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}. \end{cases}$

695. $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3 \\ 2x+y=7. \end{cases}$

696. $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}=2 \\ \sqrt{y+\sqrt{x}}-\sqrt{y-\sqrt{x}}=1. \end{cases}$

697. $\begin{cases} \sqrt{xy}+\sqrt{yz}=9 \\ \sqrt{yz}+\sqrt{zx}=5 \\ \sqrt{xz}+\sqrt{xy}=8. \end{cases}$

698. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}=3 \\ \sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}=5 \\ \sqrt{z+x}+\sqrt{x+y}=4. \end{cases}$

699. $\begin{cases} \sqrt{x-4}+\sqrt{y}+\sqrt{z+4}=6 \\ 2\sqrt{x-4}-\sqrt{y}-4\sqrt{z+4}=-12 \\ x+y+z=14. \end{cases}$

700. $\begin{cases} \sqrt{4x+y-3z+7}=2 \\ \sqrt[3]{2y+5x+z+25{,}5}=3 \\ \sqrt{y+z}-\sqrt{6x}=0. \end{cases}$

§ 13. Ecuaciones exponenciales

Al resolver ecuaciones exponenciales se emplean dos métodos fundamentales: 1) paso de la ecuación $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ a la ecuación $f(x)=g(x)$; 2) introducción de nuevas variables. En ocasiones, es preciso aplicar procedimientos artificiales.

1. Ecuaciones exponenciales. Examinemos las ecuaciones del tipo $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, donde $a>0$ y $a\neq 1$ y aquellas que se reducen a ellas. La resolución de semejantes ecuaciones se basa en el siguiente teorema.

TEOREMA. *Si $a > 0$ y $a \neq 1$, la ecuación $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ es equivalente a la ecuación $f(x) = g(x)$.*

EJEMPLO 1. Resolvamos la ecuación $2^{x^2-2x} = 2^{3x-6}$.

SOLUCIÓN La ecuación dada es equivalente a $x^2 - 2x = 3x - 6$ y, por lo tanto, las raíces de la última ecuación $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ son también las raíces de la ecuación inicial.

EJEMPLO 2 Resolvamos la ecuación $\frac{0{,}2^{x-0{,}5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0{,}04^{x-1}$.

SOLUCIÓN. Reduzcamos todos los exponentes a una misma base, p. ej., a la base 5:

$$5^{0,5-x} \cdot 5^{-0,5} = 5 \cdot (5^{-2})^{x-1}.$$

A continuación, tenemos: $5^{-x} = 5^{3-2x}$. La última ecuación es equivalente a $x = 2x - 3$, de la que hallamos $x = 3$. Así, pues, $x = 3$ es la raíz de la ecuación dada.

EJEMPLO 3. Resolvamos la ecuación

$$3^{x^2-4} = 5^{2x}. \qquad (1)$$

SOLUCIÓN. Como $5 = 3^{\log_3 5}$, la ecuación (1) se puede transformar a la forma $3^{x^2-4} = (3^{\log_3 5})^{2x}$.

Esta ecuación es equivalente a la siguiente:

$$x^2 - 4 = 2x \log_3 5. \qquad (2)$$

Las raíces de la ecuación cuadrática (2) y, junto con ella de la ecuación exponencial dada (1), son las siguientes: $x_{1,2} = \log_3 5 \pm \pm \sqrt{\log_3^2 5 + 4}$.

EJEMPLO 4 Resolvamos la ecuación

$$5^{1+2x} + 6^{1+x} = 30 + 150^x. \qquad (3)$$

SOLUCIÓN Como $5^{1+2x} = 5 \cdot 25^x$, $6^{1+x} = 6 \cdot 6^x$ y $150^x = 6^x \cdot 25^x$, la ecuación (3) se puede transformar a la forma:

$$5 \cdot 25^x + 6 \cdot 6^x - 6^x \cdot 25^x - 30 = 0,$$

y, a continuación, $5(25^x - 6) - 6^x(25^x - 6) = 0$, $(25^x - 6) \times \times (5 - 6^x) = 0$.

La última ecuación se reduce al conjunto de ecuaciones

$$25^x - 6 = 0; \ 5 - 6^x = 0,$$

que tiene las raíces: $x_1 = \log_{25} 6$, $x_2 = \log_6 5$.

Los valores hallados de x son las raíces de la ecuación (3).

EJEMPLO 5. Resolvamos la ecuación

$$4^x + 2^{x+1} - 24 = 0. \qquad (4)$$

SOLUCIÓN. Apliquemos el método de introducción de nuevas variables.

Como $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$ y $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$, la ecuación (4) puede ser reescrita del modo siguiente:

$$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0.$$

Haciendo $u = 2^x$, obtenemos la ecuación cuadrática $u^2 + 2u - 24 = 0$, cuyas raíces son $u_1 = 4$, $u_2 = -6$. Por esta razón, el problema se reduce a la resolución del conjunto de ecuaciones: $2^x = 4$; $2^x = -6$.

De la primera ecuación de este conjunto, obtenemos: $x = 2$. La segunda ecuación no tiene raíces, ya que $2^x > 0$ con cualquier valor de x. Así, pues, $x = 2$ es la raíz de la ecuación (4).

EJEMPLO 6. Resolvamos la ecuación

$$2^x + (0,5)^{2x-3} - 6\,(0,5)^x = 1.$$

SOLUCIÓN. Como $(0,5)^{2x-3} = 2^{3-2x} = \frac{8}{2^{2x}}$ y $6\,(0,5)^x = \frac{6}{2^x}$, entonces

$$2^x + \frac{8}{2^{2x}} - \frac{6}{2^x} - 1 = 0.$$

Haciendo $u = 2^x$, obtenemos: $u + \frac{8}{u^2} - \frac{6}{u} - 1 = 0$ y, seguidamente, $u^3 - u^2 - 6u + 8 = 0$, es decir, $(u-2)(u^2 + u - 4) = 0$.

Esta última ecuación tiene tres raíces: $u_1 = 2$, $u_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$, $u_3 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$.

Ahora, el problema se reduce a la solución del conjunto de ecuaciones:

$$2^x = 2;\ 2^x = \frac{\sqrt{17}-1}{2};\ 2^x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}.$$

De la primera ecuación hallamos $x_1 = 1$, de la segunda, — $x_2 = \log_2 \frac{\sqrt{17}-1}{2}$, la tercera ecuación no tiene raíces, ya que $\frac{-1-\sqrt{17}}{2} < 0$ y $2^x > 0$ con $x \in R$.

Es decir, la ecuación inicial tiene las siguientes raíces: $x_1 = 1$, $x_2 = \log_2 \frac{\sqrt{17}-1}{2}$.

EJEMPLO 7. Resolvamos la ecuación

$$6 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 2^{2x} = 0. \qquad (5)$$

SOLUCIÓN. Como $6^x = 3^x \cdot 2^x$, tendremos:

$$6 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 3^x \cdot 2^x + 6 \cdot 2^{2x} = 0.$$

Haciendo $u = 3^x$, $v = 2^x$, obtenemos la ecuación:

$$6u^2 - 13uv + 6v^2 = 0, \qquad (6)$$

que es una ecuación homogénea de segundo grado con relación a las variables u y v. Como $v = 2^x$ no se reduce a cero con ninguno de los valores de x, al dividir ambos miembros de la ecuación (6) por v^2, obtenemos una ecuación equivalente a (6):

$$6\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 13\frac{u}{v} + 6 = 0.$$

Haciendo $z = \frac{u}{v}$, obtenemos: $6z^2 - 13z + 6 = 0$, de donde $z_1 = \frac{3}{2}$, $z_2 = \frac{2}{3}$.

Tomando en consideración que $z = \frac{u}{v} = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, podemos escribir el conjunto de ecuaciones:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2}; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3},$$

del cual, hallamos: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Esto significa, que la ecuación (5) tiene dos raíces: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

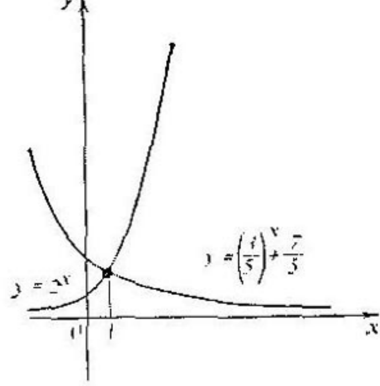


Fig. 5

EJEMPLO 8. Resolvamos la ecuación

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x. \qquad (7)$$

SOLUCIÓN. Ninguno de los procedimientos analizados en los anteriores ejemplos nos sirve para resolver (7). Intentemos hallar alguna solución de esa ecuación según el método de selección. En el caso dado, esto es fácil: $x_1 = 1$. Claro está, que, por ahora, no podemos considerar que la ecuación está resuelta: ella puede asimismo tener otras raíces. Demostremos que no hay otras raíces.

La función $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5}$ decrece, mientras que la función 2^x crece por toda la recta numérica. O sea, la ecuación (7) no puede tener más de una raíz (fig. 5). Así, pues, $x = 1$ es la única raíz de la ecuación 7.

2. Las ecuaciones exponenciales-potenciales son aquellas que tienen la forma $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{h(x)}$. Si es conocido que $f(x) > 0$ y $f(x) \neq 1$, tal ecuación, como la exponencial, se resuelve mediante la igualación de los exponentes: $g(x) = h(x)$. Si no se estipula la posibilidad de que $f(x) \leqslant 0$ ó bien $f(x) = 1$, será preciso analizar varios casos, como se hace en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 9. Resolvamos la ecuación

$$(x^2 + x - 57)^{3x^2+3} = (x^2 + x - 57)^{10x}. \tag{8}$$

SOLUCIÓN. Durante la resolución de la ecuación exponencial-potencial dada hay que analizar cuatro casos:

1) $x^2 + x - 57 = 1$, es decir, $x^2 + x - 58 = 0$. En este caso, la ecuación (8) toma la forma $1^{3x^2+3} = 1^{10x}$, es decir, $1 = 1$. Esto significa que las raíces de la ecuación $x^2 + x - 58 = 0$ son también las raíces de la ecuación (8). De la ecuación $x^2 + x - 58 = 0$, hallamos $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{233}}{2}$.

2) $x^2 + x - 57 = -1$, o sea, $x^2 + x - 56 = 0$. En este caso, la ecuación (8) toma la forma

$$(-1)^{3x^2+3} = (-1)^{10x}. \tag{9}$$

La ecuación (9) sólo puede ser satisfecha con tales valores de x con los que $3x^2 + 3$ y $10x$ son números enteros (ya que el número negativo (-1) sólo puede elevarse a un exponente entero) de igual paridad (o sea, los dos son pares o bien los dos, impares).

De la ecuación $x^2 + x - 56 = 0$, hallamos: $x_1 = -8$, $x_2 = 7$. El valor $x_1 = -8$ no satisface la ecuación (9), en tanto que el valor $x_2 = 7$, la satisface. Así, pues, $x = 7$ es la raíz de la ecuación (8).

3) $x^2 + x - 57 = 0$. En este caso, la ecuación (8) toma la forma

$$0^{3x^2+3} = 0^{10x}. \tag{10}$$

La ecuación (10) sólo puede ser satisfecha con tales valores de x, con los que $3x^2 + 3 > 0$ (esto es cierto para toda x) y $10x > 0$, en este caso la ecuación (10) toma la forma $0 = 0$ (recordemos que la expresión 0^r sólo tiene sentido con $r > 0$).

De la ecuación $x^2 + x - 57 = 0$ hallamos $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{229}}{2}$. El valor de $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{229}}{2}$ no satisface la condición $10x > 0$, en tanto que $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{229}}{2}$ satisface dicha condición. Así, pues, $x = \frac{-1 + \sqrt{229}}{2}$ es la raíz de la ecuación (8).

4) Si $x^2 + x - 57 > 0$ y $x^2 + x - 57 \neq 1$, de la ecuación (8) llegamos a la conclusión de que $3x^2 + 3 = 10x$, de donde obtenemos:

$x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Estos dos valores han de ser comprobados poniéndolos en la ecuación (8). Con $x = 3$ obtenemos $(-45)^{30} = (-45)^{30}$, es decir, una igualdad cierta.

Con $x = \frac{1}{3}$ la ecuación (8) toma la forma:

$$\left(\frac{4}{9}-57\right)^{\frac{10}{3}} = \left(\frac{4}{9}-57\right)^{\frac{10}{3}}.$$

Esta anotación no tiene sentido (un número negativo se eleva a una potencia fraccionaria). Esto significa que sólo $x = 3$ es la raíz de la ecuación (8).

Resumiendo, llegamos a la conclusión de que la ecuación (8) tiene cinco raíces: $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{233}}{2}$; $x_3 = 7$, $x_4 = \frac{-1+\sqrt{229}}{2}$. $x_5 = 3$.

EJERCICIOS

Resuelvan las siguientes ecuaciones:

701. $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$. 702. $2^{x^2}\cdot 5^{x^2} = 0{,}001\cdot(10^{3-x})^2$.

703. $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{9}{16}$.

704. $(0{,}6)^x\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3$.

705. $\sqrt{2x\sqrt[3]{4^x\cdot 0{,}125^{\frac{1}{x}}}} = 4\sqrt[3]{2}$.

706. $10^x - 5^{x-1}\cdot 2^{x-2} = 950$.

707. $2^{3x}\cdot 3^x - 2^{3x-1}\cdot 3^{x+1} = -288$.

708. $2\cdot 7^{3x} - 5\cdot 49^{3x} + 3 = 0$.

709. $3\cdot 5^{2x-1} - 2\cdot 5^{x-1} = 0{,}2$.

710. $9^{x^2-1} - 36\cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$.

711. $\frac{2^x+10}{4} = \frac{9}{2^{x-2}}$. 712. $3^{3x+1} - 4\cdot 27^{x-1} + 9^{1,5x-1} - 80 = 0$.

713. $4^{\sqrt{x+1}} - 2^{\sqrt{x+1}+2} = 0$.

714. $2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5\,(\sqrt{2})^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0$.

715. $5^{2x} - 7^x - 35\cdot 5^{2x} - 35\cdot 7^x = 0$.

716. $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$.

717. $(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 4$. 718 $4^x + 6^x = 2\cdot 9^x$.

719. $2\cdot 4^x + 25^{x+1} = 15\cdot 10^x$. 720. $16^x + 36^x = 2\cdot 81^x$.

721. $56\cdot 4^{x-1} - 53\cdot 14^x + 2\cdot 49^{x+0,5} = 0$.

722. $2^{2x}\cdot 9^x - 2\cdot 6^{3x-1} + 4^{2x-1}\cdot 3^{4x-2} = 0$.

723. $2^x - 2\cdot(0,5)^{2x} - (0,5)^x + 1 = 0$.
724. $27\cdot 2^{-3x} + 9\cdot 2^x - 2^{3x} - 27\cdot 2^{-x} = 8$.
725. $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} = \frac{4}{2-\sqrt{3}}$.
726. $3^x\cdot 8^{\frac{x}{x+2}} = 6$. 727. $5^{x-2}\cdot 2^{\frac{3x}{x+1}} = 4$.
728. $(x^2-x-1)^{x^2-1} = 1$. 729. $|x|^{x^2-2x} = 1$.
730. $(x-2)^{x^2-x} = (x-2)^{12}$.
731. $(3x-4)^{2x^2+2} = (3x-4)^{5x}$.
732. $3^x + 4^x = 5^x$. 733. $8 - x\cdot 2^x + 2^{3-x} - x = 0$.
734. $\sqrt{x}\,(9^{\sqrt{x^2-3}} - 3^{\sqrt{x^2-3}}) = 3^{2\sqrt{x^2-3}+1} - 3^{\sqrt{x^2-3}+1} + 6\sqrt{x} - 18$.
735. $2\sqrt{x}\cdot 4^x + 5\cdot 2^{x+1} + 2\sqrt{x} = 2^{2x+2} + 5\sqrt{x}\cdot 2^x + 4$.

§ 14. Ecuaciones logarítmicas

Al resolver ecuaciones logarítmicas se utilizan dos metodos fundamentales: 1) paso de la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ a la ecuación $f(x) = g(x)$; 2) introducción de nuevas variables. En ciertas ocasiones es preciso aplicar procedimientos artificiales.

Ecuaciones logarítmicas. Consideremos las ecuaciones logarítmicas de la forma

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \tag{1}$$

donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

La resolución de semejantes ecuaciones se basa en el siguiente teorema:

TEOREMA 1. *La ecuación* $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ *es equivalente al sistema mixto:*

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Es de notar que para resolver la ecuación (1) no es obligatorio resolver el sistema (2). Se puede operar de otro modo: resolver la ecuación

$$f(x) = g(x) \tag{3}$$

y de sus soluciones elegir aquellas que satisfacen el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0, \end{cases} \tag{4}$$

es decir, que pertenecen al campo de definición de la ecuación (1).

Al resolver las ecuaciones logarítmicas se hace uso de distintas propiedades de los logaritmos. P. ej., estudiemos la ecuación

$$\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a h(x). \qquad (5)$$

Ella se transforma a la forma:

$$\log_a (f(x) \cdot g(x)) = \log_a h(x). \qquad (6)$$

Pero las ecuaciones (5) y (6) pueden ser equivalentes. En efecto, el campo de definición de la expresión $\log_a f(x) + \log_a g(x)$ se prefija con el sistema de desigualdades $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$, en tanto que el campo de definición de la expresión $\log_a (f(x) g(x))$ se preestablece con la desiguldad $f(x) \cdot g(x) > 0$ que, a su vez, es equivalente al conjunto de los sistemas de desigualdades:'

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}.$$

Así, pues, al pasar de la ecuación (5) a la (6) es posible que se produzca la ampliación del campo de definición de la ecuación (5) (a cuenta de la resolución del último sistema de desigualdades), o sea, que pueden aparecer raíces extrañas. Por esta razón, después de resolver la ecuación (6), es preciso elegir entre sus raíces halladas aquellas que pertenecen al campo de definición de la ecuación inicial (5), es decir, que satisfacen el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ h(x) > 0. \end{cases}$$

Semejante prueba es parte inseparable de la resolución de una ecuación logarítmica.

Claro está, la verificación puede ser realizada también de otros procedimientos, p. ej., con ayuda de la sustitución directa de las soluciones halladas en la ecuación inicial.

Analicemos ahora las ecuaciones de la forma

$$\log_{a(x)} f(x) = \log_{a(x)} g(x). \qquad (7)$$

Su resolución se apoya en el siguiente teorema.

Teorema 2. *La ecuación* (7) *es equivalente al sistema mixto*:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ a(x) > 0 \\ a(x) \neq 1. \end{cases}$$

Con otras palabras, las raíces de las ecuaciones (7) son aquellas, y sólo aquellas raíces de la ecuación $f(x) = g(x)$ que, simultáneamente, satisfacen las siguientes condiciones:

$$f(x) > 0,\ g(x) > 0,\ a(x) > 0,\ a(x) \neq 1$$

(con estas condiciones se prefija el campo de definición de la ecuación (7)).

EJEMPLO 1. Resolvamos la ecuación

$$\log_3 (x^2 - 3x - 5) = \log_3 (7 - 2x). \tag{8}$$

SOLUCIÓN. De acuerdo con el teorema 1 la ecuación (8) es equivalente al siguiente sistema mixto:

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x \\ x^2 - 3x - 5 > 0 \\ 7 - 2x > 0. \end{cases} \tag{9}$$

Después de resolver este sistema, obtenemos: $x_1 = 4$, $x_2 = -3$. De estos dos valores sólo $x = -3$ satisface las dos desigualdades del sistema (9) (es decir, el valor de $x = 4$ no pertenece al campo de definición de la ecuación (8)). Por esto, la solución de ésta es $x = -3$.

EJEMPLO 2. Resolvamos la ecuación

$$\log (x + 4) + \log (2x + 3) = \log (1 - 2x). \tag{10}$$

SOLUCION. Transformemos la ecuación (10) a la forma

$$\log ((x + 4)(2x + 3)) = \log (1 - 2x)$$

y, a continuación,

$$(x + 4)(2x + 3) = 1 - 2x. \tag{11}$$

De la ecuación (11) hallamos: $x_1 = -1$, $x_2 = -5{,}5$.

El campo de definición de la ecuación (10) se preestablece con el sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} x + 4 > 0 \\ 2x + 3 > 0 \\ 1 - 2x > 0. \end{cases} \tag{12}$$

Poniendo las raíces de la ecuación (11), una tras otra, en el sistema (12) nos cercioramos que $x_1 = -1$ satisface este sistema, mientras que $x_2 = -5{,}5$ no lo satisface. Así, pues, $x = -1$ es la unica raíz de la ecuación (10).

EJEMPLO 3. Resolvamos la ecuación

$$\log_2 (x^2 - 1) = \log_{\frac{1}{2}} (x - 1). \tag{13}$$

SOLUCIÓN. Ante todo, pasemos en la ecuación (13) a los logaritmos con iguales bases. Como $\log_a N = \log_{a^k} N^k$, la ecuación (13) se transforma al aspecto

$$\log_2 (x^2 - 1) = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} (x-1)^{-1}.$$

A continuación, tenemos $\log_2 (x^2 - 1) = -\log_2 (x-1)$,

$$\log_2 (x^2 - 1) = \log_2 \frac{1}{x-1}. \qquad (14)$$

Habiendo resuelto la ecuación (14), hallamos: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Nos resta elegir entre los valores obtenidos aquellos que satisfacen el sistema de desigualdades $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x - 1 > 0. \end{cases}$

Resolviendo este sistema, hallamos que $x > 1$. De los valores obtenidos x_1, x_2, x_3 sólo $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ satisface la desigualdad $x > 1$. Así, pues, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es la única raíz de la ecuación (13).

EJEMPLO 4. Resolvamos la ecuación

$$\log_{x+4} (x^2 - 1) = \log_{x+4} (5 - x). \qquad (15)$$

SOLUCIÓN. Según el teorema 2 esta ecuación es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 5 - x \\ x^2 - 1 > 0 \\ 5 - x > 0 \\ x + 4 > 0 \\ x + 4 \neq 1. \end{cases} \qquad (16)$$

Después de resolver la ecuación que entra en el sistema (16), obtenemos: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$. De estos dos valores sólo $x = 2$ satisface todas las demás condiciones del sistema (16). Así, pues, $x = 2$ es la raíz de la ecuación (15).

EJEMPLO 5. Resolvamos la ecuación $\log^2 x + \log x + 1 = \frac{7}{\log \frac{x}{10}}$.

SOLUCIÓN. Como $\log \frac{x}{10} = \log x - 1$, la ecuación dada puede reescribirse en la siguiente forma:

$$\log^2 x + \log x + 1 = \frac{7}{\log x - 1}.$$

Haciendo $u = \log x$ obtenemos la ecuación

$$u^2 + u + 1 = \frac{7}{u-1},$$

de donde hallamos que $u = 2$. De la ecuación $\log x = 2$ hallamos $x = 100$. Es fácil cerciorarse de que ésta es la única raíz de la ecuación inicial.

EJEMPLO 6. Resolvamos la ecuación

$$\log^2 x^3 - \log (0{,}1x^{10}) = 0. \qquad (17)$$

SOLUCIÓN. Tenemos

$$(\log x^3)^2 - \log x^{10} - \log 0{,}1 = 0,$$
$$9 \log^2 x - 10 \log |x| + 1 = 0,$$

y, a continuación,

$$9 \log^2 x - 10 \log x + 1 = 0$$

(en el caso dado $|x| = x$, ya que el campo de definición de la ecuación (17) se prefija con la desigualdad $x > 0$).

Haciendo $u = \log x$ obtenemos la ecuación cuadrática $9u^2 - 10u + 1 = 0$, cuyas raíces son $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{1}{9}$. Queda por resolver el conjunto de ecuaciones $\log x = 1$; $\log x = \frac{1}{9}$.

De la primera ecuación obtenemos $x_1 = 10$, de la segunda, $x_2 = \sqrt{10}$. Estos valores de x son también las soluciones de la ecuación (17).

EJEMPLO 7. Resolvamos la ecuación

$$\log_{0,5x} x^2 - 14 \log_{16x} x^2 + 40 \log_{4x} \sqrt{x} = 0.$$

SOLUCIÓN. Pasando en todos los logaritmos a la base 2, obtenemos

$$\frac{\log_2 x^2}{\log_2 0{,}5x} - \frac{14 \log_2 x^3}{\log_2 16x} + \frac{40 \log_2 \sqrt{x}}{\log_2 4x} = 0$$

y, seguidamente, $\frac{2 \log_2 |x|}{\log_2 x - 1} - \frac{42 \log_2 x}{\log_2 x + 4} + \frac{20 \log_2 x}{\log_2 x + 2} = 0.$

De la ecuación dada se desprende que $x > 0$ y, por lo tanto, $|x| = 0$, es decir, $\log_2 |x| = \log_2 x$. Haciendo $u = \log_2 x$, obtenemos la ecuación:

$$\frac{2u}{u-1} - \frac{42u}{u+4} + \frac{20u}{u+2} = 0,$$

cuyas raíces son $u_1 = -\frac{1}{2}$, $u_2 = 0$, $u_3 = 2$.

Ahora, el problema se reduce a resolver el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\log_2 x = -\frac{1}{2}; \quad \log_2 x = 0; \quad \log_2 x = 2.$$

De la primera ecuación hallamos $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, de la segunda, $x_2 = 1$, de la tercera, $x_3 = 4$.

Todos los valores hallados son las raíces de la ecuación inicial (cerciórense de ello por su cuenta).

EJEMPLO 8. Resolvamos la ecuación $\log(20 - x) = \log^3 x$.

SOLUCIÓN. Esta ecuación no puede ser resuelta con ninguno de los procedimientos estudiados en los anteriores problemas. Hallemos alguna de sus raíces según el método de selección. En nuestro caso, obtenemos $x_1 = 10$. Pero no podemos considerar que la ecuación ya está resuelta: es posible que ella tenga otras raíces. Demostremos que no las tiene. Está claro, que las raíces de la ecuación se deben buscar en el campo de su definición, es decir, en el intervalo $]0; 20[$. En éste, la función $y = \log(20 - x)$ decrece, mientras que la función $y = \log^3 x$, crece. Pero, entonces, si la ecuación tiene raíz, ésta será sólo una (véase la pág. 121). Así, pues, $x = 10$ es la única raíz de la ecuación dada.

2. Ecuaciones exponenciales-logarítmicas. En este apartado vamos a estudiar ecuaciones que pueden ser consideradas tanto exponenciales como logarítmicas.

EJEMPLO 9. Resolvamos la ecuación

$$x^{1-\log x} = 0{,}01. \tag{18}$$

SOLUCIÓN. El campo de definición de la ecuación es $x > 0$. En este campo, las expresiones que entran en ambos miembros de la ecuación (18), sólo toman valores positivos, por lo que al tomar los logaritmos decimales de dos miembros de la ecuación, obtenemos la ecuación

$$\log x^{1-\log x} = \log 0{,}01,$$

equivalente a la ecuación (18). A continuación, tenemos

$$(1 - \log x) \log x = -2.$$

Hagamos $u = \log x$, obtenemos la ecuación $(1-u)u = -2$, de donde $u_1 = -1$; $u_2 = 2$. Queda por resolver el siguiente conjunto de ecuaciones: $\log x = -1$; $\log x = 2$.

De este conjunto, obtenemos: $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 100$.

Éstas serán las raíces de la ecuación (18).

EJEMPLO 10. Resolvamos la ecuación

$$\log_x (3x^{\log_5 x} + 4) = 2\log_5 x. \tag{19}$$

SOLUCIÓN. Haciendo uso de la definición del logaritmo, transformemos la ecuación (19) a la forma:

$$x^{2\log_5 x} = 3x^{\log_5 x} + 4.$$

Haciendo $u = x^{\log_5 x}$, obtenemos la ecuación $u^2 - 3u - 4 = 0$, cuyas raíces son $u_1 = -1$, $u_2 = 4$.

Ahora, el problema se reduce a la resolución del siguiente conjunto de ecuaciones: $x^{\log_5 x} = -1$; $x^{\log_5 x} = 4$.

Como $x^{\log_5 x} > 0$ y $-1 < 0$, la primera ecuación del conjunto no tiene soluciones. Tomando los logaritmos por la base 5 de ambos miembros de la segunda ecuación del conjunto, obtenemos:

$$\log_5^2 x = \log_5 4, \text{ es decir, } \log_5 x = \pm\sqrt{\log_5 4},$$

de donde hallamos $x_{1,2} = 5^{\pm\sqrt{\log_5 4}}$. Como es fácil cerciorarse, éstas son las raíces de la ecuación (19).

EJEMPLO 11. Resolvamos la ecuación

$$\log_5 (5^{\frac{1}{x}} + 125) = \log_5 6 + 1 + \frac{1}{2x}. \tag{20}$$

SOLUCIÓN. Primero vamos a considerar esta ecuación como logarítmica. Como $1 + \frac{1}{2x} = \log_5 5^{1+\frac{1}{2x}}$, escribimos la ecuación (20) en la forma:

$$\log_5 (5^{\frac{1}{x}} + 125) = \log_5 6 + \log_5 5^{1+\frac{1}{2x}}.$$

A continuación, tenemos

$$\log_5 (5^{\frac{1}{x}} + 125) = \log_5 (6\cdot 5\cdot 5^{\frac{1}{2x}}),$$

$$5^{\frac{1}{x}} + 125 = 30\cdot 5^{\frac{1}{2x}}.$$

Hemos obtenido una ecuación exponencial que puede ser resuelta según el método de introducción de una nueva variable. Haciendo $u = 5^{\frac{1}{2x}}$, hallamos la ecuación $u^2 - 30u + 125 = 0$, cuyas raíces son $u_1 = 5$, $u_2 = 25$.

Ahora, el problema se ha reducido a la resolución del conjunto de dos ecuaciones:

$$5^{\frac{1}{2x}} = 5; \quad 5^{\frac{1}{2x}} = 25.$$

De la primera ecuación obtenemos $\frac{1}{2x} = 1$, de donde $x_1 = \frac{1}{2}$. La segunda ecuación nos proporciona $\frac{1}{2x} = 2$, de donde $x_2 = \frac{1}{4}$. Así, pues, la ecuación (20) tiene dos raíces: $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{4}$.

EJERCICIOS

Resuelvan las ecuaciones

736. $\log_4 \frac{2}{x-1} = \log_4 (4-x)$. 737. $\log_3 ((x-1)(2x-1)) = 0$.

738. $\log_{\sqrt{2}} \frac{x^2-4x+3}{4} = -2$. 739. $\log (x+1{,}5) = -\log x$.

740. $\log (4{,}5 - x) = \log 4{,}5 - \log x$.

741. $\log \sqrt{5x-4} + \log \sqrt{x+1} = 2 + \log 0{,}18$

742. $\log \sqrt{x-5} + \log \sqrt{2x-3} + 1 = \log 30$.

743. $\log (x^3+27) - 0{,}5 \log (x^2+6x+9) = 3 \log \sqrt[3]{7}$.

744. $\log 5 + \log (x+10) = 1 - \log (2x-1) + \log (21x-20)$.

745. $\log_5 (3x-11) + \log_5 (x-27) = 3 + \log_5 8$.

746. $\frac{1-\log x}{x} = \frac{\log^2 14 - \log^2 4}{\log 3{,}5^x}$.

747. $\log_2 (x+1)^2 + \log_2 \sqrt{x^2+2x+1} = 6$.

748. $\frac{\log (35-x^3)}{\log (5-x)} = 3$. 749. $\frac{\log 2 + \log (4-5x-6x^2)}{\log \sqrt[3]{2x-1}} = 3$.

750. $\log_{\frac{1}{5}} \log_5 \sqrt{5x} = 0$. 751. $\log_{\frac{1}{2}} \log_8 \frac{x^2-2x}{x-3} = 0$.

752. $\log_4 \log_2 \log_3 (2x-1) = \frac{1}{2}$.

753. $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{1+x} + 3 \log_{\frac{1}{4}} (1-x) = \log_{\frac{1}{16}} (1-x^2)^2 + 2$.

754. $(1-\log 2) \log_5 x = \log 3 - \log (x-2)$.

755. $\log_{x^2} (x+2) = 1$. 756. $\log_{x-2} (2x-9) = \log_{x-2} (23-6x)$.

757. $\log_{5x-2} 2 + 2 \log_{5x-2} x = \log_{5x-2} (x+1)$.

758. $\log_3 (x+12) \cdot \log_x 2 = 1$.

759. $x^2 \cdot \log_x 27 \cdot \log_9 x = x + 4$.

760. $1 + \log_x \dfrac{4-x}{10} = (\log x^2 - 1) \log_x 10$.

761. $1 + 2 \log_x 2 \cdot \log_4 (10 - x) = \dfrac{2}{\log_4 x}$.

762. $\log_{x+\frac{1}{8}} 2 = \log_x 4$.

763. $\log_3 (-x^2 - 8x - 14) \log_{x^2+4x+4} 9 = 1$.

764. $0,1 \log^4 x - \log^2 x + 0,9 = 0$.

765. $\dfrac{1}{5 - 4 \log (x+1)} + \dfrac{5}{1 + 4 \log (x+1)} = 2$.

766. $4 - \log x = 3 \sqrt{\log x}$. 767. $\log^2 (100x) + \log^2 (10x) = 14 \log x + 15$.

768. $\dfrac{1 - \log^2 x}{\log x - 2 \log^2 x} = \log x^4 + 5$.

769. $\log_x 5 \sqrt{5} - \dfrac{5}{4} = \log_x^2 \sqrt{5}$.

770. $\log (\log x) + \log (\log x^3 - 2) = 0$. 771. $\log_x 2 + \log_2 x = 2,5$.

772. $\log_{\frac{1}{2}}^2 4x + \log_2 \dfrac{x^2}{8} = 8$.

773. $\log (x^2 - 8) \cdot \log (2 - x) = \dfrac{\log_5 (x^2 - 8)}{\log_5 (2 - x)}$.

774. $\log_2 \log_3 (x^2 - 16) - \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{x^2 - 16} = 2$.

775. $3 \log_{16} \left(\sqrt{x^2+1} + x \right) + \log_2 \left(\sqrt{x^2+1} - x \right) = \log_{16} (4x+1) - 0,5$.

776. $2 \log_x 3 + \log_{3x} 3 + 3 \log_{9x} 3 = 0$.

777. $\log_{x+1} \left(x - \dfrac{1}{2} \right) = \log_{x-\frac{1}{2}} (x+1)$.

778. $\log_{3x+7} (5x+3) + \log_{5x+3} (3x+7) = 2$.

779. $(0,4)^{\log^2 x + 1} = (6,25)^{2 - \log x^3}$.

780. $(1,25)^{1 - \log_2^2 x} = (0,64)^{2 \log_2 2x}$.

781. $x^{\log x} = 1000x^2$. 782. $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$.

783. $x^{\log_{\sqrt{x}} 2x} = 4$. 784. $x^{\frac{\log x + 7}{4}} = 10^{\log x + 1}$.

785. $\left(\sqrt{x} \right)^{\log_5 x - 1} = 5$. 786. $x^{\log_3 x + 1} = 9x$.

787. $\left(\sqrt{x} \right)^{\log_{x^2} (x^2 - 1)} = 5$.

788. $\log_x (2x^{x-2} - 1) + 4 = 2x$.

789. $15^{\log_5 3} x^{\log_5 9x + 1} = 1$. 790. $16^{\log_x 2} = 8x$.

791. $x^{\log_2 x^3 - \log_2^2 x + 3} - \dfrac{1}{x} = 0$.

792. $5^{\log x} - 3^{\log x - 1} = 3^{\log x + 1} - 5^{\log x - 1}$.

793. $2x^{\log x} + 3x^{-\log x} = 5.$ 794. $x^{(\log_3 x)^3 - 3\log_3 x} = 3^{8-3\log_{2\sqrt{2}} 4}.$

795. $x^{\log_2^2 x^2 - \log_2 2x - 2} + (x+2)^{\log_{(x+2)^2} 4} = 3.$

796. $7x^{\frac{1}{\log_2^2 x^3} + \log_x 2} = 5 + (x+7)^{\frac{2}{\log_{\sqrt{2}}(x+7)}}.$

797. $\log(3^x - 2^{4-x}) = 2 + 0{,}25\log 16 - 0{,}5x\log 4.$

798. $\log_2(9 - 2^x) = 25^{\log_5 \sqrt{3-x}}.$

799. $3\log 2 + \log(2^{\sqrt{x-1}-1} - 1) = \log(0{,}4\sqrt{2^{\sqrt{x-1}}} + 4) + 1.$

800. $|x-1|^{\log^2 x - \log x^2} = |x-1|^3.$

801. $4^{\log_3(1-x)} = (2x^2 + 2x + 5)^{\log_3 2}.$

802. $x^{\log_2 \frac{x}{98}} \cdot 14^{\log_2 7} = 1.$

803. $3x + (3-x)\log_3 2 = \log_3\left(9\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^x + 2\cdot 6^x\right) + 1.$

804. $x^2\log_6(5x^2 - 2x - 3) - x\log_{\frac{1}{6}}(5x^2 - 2x - 3) = x^2 + x.$

805. $x^2\log_2\frac{3+x}{10} - x^2\log_{\frac{1}{2}}(2+3x) = x^2 - 4 + 2\log_{\sqrt{2}}\frac{3x^2+11x+6}{10}.$

§ 15. Sistemas de ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Al resolver sistemas de ecuaciones exponenciales y logarítmicas se utilizan los mismos procedimientos que al resolver sistemas de ecuaciones algebraicas. Hay que indicar solamente que, en muchos casos, antes de aplicar uno u otro método para resolver el sistema, es preciso transformar cada ecuación del sistema a la forma más sencilla.

EJEMPLO 1. Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 25^{2x} + 25^{2y} = 30 \\ 25^{x+y} = 5\sqrt{5}. \end{cases} \qquad (1)$$

SOLUCIÓN. Hagamos $u = 25^x$, $v = 25^y$ y obtendremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 30 \\ uv = 5\sqrt{5}, \end{cases}$$ que tiene cuatro resoluciones:

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ v_1 = \sqrt{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = \sqrt{5} \\ v_2 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} u_3 = -5 \\ v_3 = -\sqrt{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} u_4 = -\sqrt{5} \\ v_4 = -5. \end{cases}$$

Pero $u = 25^x$, $v = 25^y$, o sea, $u > 0$, $v > 0$, lo que significa que de las cuatro soluciones sólo hay que tomar las dos primeras.

Así, pues, el problema se reduce a la solución del siguiente conjunto de sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} 25^x = 5 \\ 25^y = \sqrt{5} \end{cases}; \quad \begin{cases} 25^x = \sqrt{5} \\ 25^y = 5. \end{cases}$$

Del primer sistema hallamos: $x_1 = \frac{1}{2}$, $y_1 = \frac{1}{4}$, del segundo: $x_2 = \frac{1}{4}$, $y_2 = \frac{1}{2}$.

De modo que el sistema (1) tiene dos soluciones: $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

EJEMPLO 2. Resolvamos el sistema

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12 \\ 2^y \cdot 3^x = 18. \end{cases} \quad (2)$$

SOLUCIÓN. Multiplicando, término por término, las ecuaciones del sistema (2), obtenemos la ecuación:

$$2^{x+y} \cdot 3^{x+y} = 216 \text{ o bien } 6^{x+y} = 6^3,$$

de donde $x + y = 3$.

Dividiendo, término por término, la primera ecuación del sistema (2) por la segunda, obtenemos la ecuación

$$2^{x-y} \cdot 3^{y-x} = \frac{2}{3} \text{ o bien } \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{2}{3},$$

de donde $x - y = 1$.

A continuación, del sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$ hallamos $x = 2$, $y = 1$.

De forma que el par (2; 1) es la solución del sistema (2).

EJEMPLO 3. Resolvamos el sistema

$$\begin{cases} x^{y-2} = 4 \\ x^{2y-3} = 64. \end{cases} \quad (3)$$

SOLUCIÓN. Tomando los logaritmos por la base 2 de ambos miembros de cada una de las ecuaciones del sistema (3), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \log_2 x^{y-2} = 2 \\ \log_2 x^{2y-3} = 6, \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} (y-2) \log_2 x = 2 \\ (2y-3) \log_2 x = 6 \end{cases}$$

Es evidente que $x \neq 0$, es decir, $\log_2 x \neq 0$, por lo que dividiendo la primera ecuación de este sistema por la segunda, obtenemos

$\frac{y-2}{2y-3}=\frac{1}{3}$, de donde $y=3$. Poniendo este valor de y en la ecuación $(y-2)\log_2 x=2$, hallamos $\log_2 x=2$, o sea, $x=4$.

Así, pues, el par (4; 3) es la solución del sistema (3).

EJEMPLO 3. Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^{\log_y x}\cdot y=x^{\frac{5}{2}} \\ \log_4 y\cdot\log_y(y-3x)=1. \end{cases} \qquad (4)$$

SOLUCIÓN. Reduzcamos la primera ecuación del sistema (4) a una forma más sencilla. Para ello, tomemos los logaritmos por la base y de ambos miembros de la ecuación:

$$\log_y(x^{\log_y x}\cdot y)=\log_y x^{\frac{5}{2}}$$

y, a continuación, $\log_y x^{\log_y x}+\log_y y=\frac{5}{2}\log_y x$,

$$\log_y^2+1=\frac{5}{2}\log_y x.$$

Haciendo $u=\log_y x$ obtenemos la ecuación cuadrática con relación a u $u^2-\frac{5}{2}u+1=0$, cuyas raíces son $u_1=2$, $u_2=\frac{1}{2}$. Esto significa que $\log_y x=2$, entonces $x=y^2$, o bien $\log_y x=\frac{1}{2}$, siendo aquí $x=\sqrt{y}$, o sea, $y=x^2$. Así, pues, la primera ecuación del sistema (4) se ha reducido al conjunto de dos ecuaciones más sencillas:

$$x=y^2;\ y=x^2.$$

Ahora, reduzcamos la segunda ecuación del sistema (4) a una forma más sencilla. Para ello, pasemos al logaritmo por la base 4:

$$\log_4 y\cdot\frac{\log_4(y-3x)}{\log_4 y}=1$$

y, seguidamente, $\log_4(y-3x)=1$, de donde $y-3x=4$.

Ahora, queda por resolver el conjunto de dos sencillos sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x=y^2 \\ y-3x=4 \end{cases};\qquad \begin{cases} y=x^2 \\ y-3x=4. \end{cases}$$

El primer sistema no tiene soluciones, el segundo, dos soluciones: (4; 16), (—1; 1).

VERIFICACIÓN. Las soluciones del sistema (4) deben satisfacer las siguientes condiciones: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ y - 3x > 0 \\ y \neq 1. \end{cases}$

El par (4; 16) satisface este sistema, el par (—1; 1), no. O sea, (4; 16) es la solución única del sistema 4.

EJERCICIOS

Resuelvan los siguientes sistemas de ecuaciones:

806. $\begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{65}{36} \\ xy - x + y = 118. \end{cases}$

807. $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ x + y = 5. \end{cases}$ 808. $\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12 \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2}. \end{cases}$

809. $\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y. \end{cases}$ 810. $\begin{cases} 2^x \cdot 9^y = 648 \\ 3^x \cdot 4^y = 432. \end{cases}$

811. $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 7. \end{cases}$ 812. $\begin{cases} x^{y+1} = 27 \\ x^{2y-5} = \frac{1}{3}. \end{cases}$

813. $\begin{cases} x^{x+y} = y^{12} \\ y^{x+y} = x^3. \end{cases}$ 814. $\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y \\ y^{\sqrt{y}} = x^4. \end{cases}$

815. $\begin{cases} \log x + \log y = \log 2 \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$ 816. $\begin{cases} \log_y x - \log_x y = \frac{8}{3} \\ xy = 16. \end{cases}$

817. $\begin{cases} \log(x^2 + y^2) - 1 = \log 13 \\ \log(x + y) - \log(x - y) = 3\log 2. \end{cases}$

818. $\begin{cases} 5(\log_y x + \log_x y) = 26 \\ xy = 64. \end{cases}$

819. $\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = 32 \\ \log(x - y)^2 = 2\log 2. \end{cases}$ 820. $\begin{cases} 10^{2 - \log(x-y)} = 25 \\ \log(x - y) + \log(x + y) = 1 + 2\log 2. \end{cases}$

821. $\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}} - (\sqrt[4]{2})^{x-y} = 12 \\ 3^{\log(2y-x)} = 1. \end{cases}$

822. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4. \end{cases}$ 823. $\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7 \\ x^y = 5^{12}. \end{cases}$

824. $\begin{cases} 3(2\log_{y^2} x - \log_{\frac{1}{x}} y) = 10 \\ xy = 81. \end{cases}$

825. $\begin{cases} \log_{0,5}(y-x)+\log_2 \dfrac{1}{y}=-2 \\ x^2+y^2=25. \end{cases}$

826. $\begin{cases} (x+y)\, 3^{y-x}=\dfrac{5}{27} \\ 3\log_5(x+y)=x-y. \end{cases}$

827. $\begin{cases} x^y=y^x \\ x^x=y^{9y}\ (x>0,\ y>0). \end{cases}$

828. $\begin{cases} 20x^{\log_3 y}+7y^{\log_3 x}=81\sqrt[3]{3} \\ \log_9 x^2+\log_{27} y^3=\dfrac{8}{3}. \end{cases}$

829. $\begin{cases} \log_4 xy+3\,\dfrac{\log_{\frac{1}{4}} x}{\log_{\frac{1}{4}} y}=0 \\ \log_4 \dfrac{x}{y}-\log_4 x\cdot\log_{\frac{1}{4}} y=0. \end{cases}$

830. $\begin{cases} \log_2(x+y)+2\log_4(x-y)=5 \\ 2^x-5\cdot 2^{0,5(x+y-1)}+2^{y+1}=0. \end{cases}$

831. $\begin{cases} \log_2(10-2^y)=4-y \\ \log_2 \dfrac{x+3y-1}{3y-x}=\log_2(x-1)-\log_2(3-x). \end{cases}$

832. $\begin{cases} \log x\cdot\log(x+y)=\log y\cdot\log(x-1) \\ \log y\cdot\log(x+y)=\log x\cdot\log(x-y). \end{cases}$

833. $\begin{cases} 4^{x+y}=27+9^{x-y} \\ 8^{x+y}-21\cdot 2^{x+y}=27^{x-y}+7\cdot 3^{x-y+1}. \end{cases}$

834. $\begin{cases} x\cdot 2^{x+1}-2\cdot 2^y=-3y\cdot 4^{x+y} \\ 2x\cdot 2^{2x+y}+3y\cdot 8^{x+y}=1. \end{cases}$

§ 16. Desigualdades racionales

1. Naciones fundamentales. Lleva el nombre de *campo de definición de la desigualdad* $f(x)>g(x)$ el conjunto de todos aquellos valores de x con los que tanto la función $f(x)$ y la función $g(x)$ quedan definidas. Con otras palabras, el campo de definición de la desigualdad $f(x)>g(x)$, es la intersección de los campos de definición de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Recibe el *nombre de solución particular de la desigualdad* $f(x)>$ $>g(x)$ todo aquel valor de la variable x que la satisface (es decir, todo valor de x con el que la enunciación «*el valor de la función* $f(x)$ *es mayor que el valor de la función* $g(x)$» es cierto). *Solución de la desigualdad* se denomina el conjunto de todas sus soluciones particulares.

Llevan el nombre de *equivalentes* dos desigualdades con una variable x si sus soluciones coinciden (en particular si ambas desigualdades no tienen solución). Si cada solución particular de la desigualdad $f_1(x)>g_1(x)$ es, simultáneamente, la solución particular de la desigualdad $f_2(x)>g_2(x)$, obtenida después de transformacio-

nes de la desigualdad $f_1(x) > g_1(x)$ (es decir, si la solución de la primera desigualdad entra en la solución de la segunda), la desigualdad $f_2(x) > g_2(x)$ lleva el nombre de *corolario de la desigualdad* $f_1(x) > g_1(x)$. En los siguientes teoremas se tratan las transformaciones que conducen a desigualdades equivalentes.

TEOREMA 1. *Si a ambos miembros de una desigualdad añadimos una misma función* $\varphi(x)$, *definida con todos los valores de* x *del campo de definición de la desigualdad inicial y, con ello, el signo de desigualdad queda invariable, se obtiene una desigualdad equivalente a la dada.*

Así, pues, las desigualdades

$$f(x) > g(x) \text{ y } f(x) + \varphi(x) > g(x) + \varphi(x)$$

son equivalentes si $\varphi(x)$ satisface la condición del teorema.

COLORARIO. *Las desigualdedes*

$$f(x) + \varphi(x) > g(x) \text{ y } f(x) > g(x) - \varphi(x)$$

son equivalentes.

TEOPEMA 2. *Si ambos miembros de una desigualdad se multiplican (o dividen) por una misma función* $\varphi(x)$ *que con toda* x *del campo de definición de la desigualdad inicial sólo toma valores positivos y, con ello, el signo de desigualdad queda invariable, se obtiene una desigualdad equivalente a la dada.*

Así, pues, si $\varphi(x) > 0$, las desigualdades

$$f(x) > g(x) \text{ y } f(x)\cdot\varphi(x) > g(x)\cdot\varphi(x)$$

$\left(\text{o bien } \frac{f(x)}{\varphi(x)} > \frac{g(x)}{\varphi(x)}\right)$ son equivalentes.

COLORARIO. *Si ambos miembros de una desigualdad se multiplican (o dividen) por un mismo número positivo, conservando el signo de desigualdad, se obtiene una desigualdad equivalente a la dada.*

TEOREMA 3 *Si ambos miembros de una desigualdad se multiplican (o dividen) por una misma función* $\varphi(x)$ *que con toda* x *del campo de definición de la desigualdad, sólo toma valores negativos y, con ello, el signo de desigualdad cambia por el opuesto, se obtiene una desigualdad equivalente a la dada.*

Así, pues, si $\varphi(x) < 0$, las desiualdades

$$f(x) > g(x) \text{ y } f(x)\cdot\varphi(x) < g(x)\cdot\varphi(x)$$

$\left(\text{o bien } \frac{f(x)}{\varphi(x)} < \frac{g(x)}{\varphi(x)}\right)$ son equivalentes.

COROLARIO. *Si ambos miembros de una desigualdad se multiplican (o dividen) por un mismo número negativo, variando el signo de desigualdad por el opuesto, se obtiene una desigualdad equivalente a la dada.*

TEOPEMA 4. *Sea dada la desigualdad* $f(x) > g(x)$, *con la particularidad de que* $f(x) \geqslant 0$ y $g(x) \geqslant 0$ *con toda* x *del campo de definición*

ón de la desigualdad. Si los dos miembros de la desigualdad se elevan a una potencia natural n, dejando el signo de desigualdad sin variar, se obtiene la desigualdad

$$(f(x))^n > (g(x))^n$$

equivalente a la dada.

OBSERVACIÓN. Más arriba (§ 7) ya indicamos que al efectuar transformaciones idénticas, es posible la variación del campo de definición de la expresión, p. ej., al reducir a términos semejantes, simplificar una fracción, puede producirse la ampliación del campo de definición. Durante la resolución de desigualdades, como resultado de las transformaciones idénticas, puede obtenerse una desigualdad no equivalente. Como ejemplo, estudiemos la desigualdad

$$\sqrt{x}+x-1 > \sqrt{x}-5. \quad (1)$$

Adicionando a ambos miembros de la desigualdad una misma función $\varphi(x) = -\sqrt{x}$, obtenemos la desigualdad

$$\sqrt{x}+x-1-\sqrt{x} > \sqrt{x}-5-\sqrt{x}, \quad (2)$$

equivalente (según el teorema 1) a la desigualdad (1). A continuación, tendremos:

$$x-1 > -5, \quad (3)$$

de donde $x > -4$. Pero la desigualdad (1) tiene la solución $x \geqslant 0$, es decir, las desigualdades (1) y (3) no son equivalentes (la desigualdad (3) es el corolario de la desigualdad (1)). La cuestión radica en que la desigualdad $x-1 > -5$ tiene un campo de definición más amplio que la (1); dicha ampliación ha tenido lugar como resultado de la reducción a términos semejantes en la desigualdad (2). Por ello, después de ejecutar transformaciones idénticas, que condujeron a la ampliación del campo de definición de la desigualdad, de las soluciones obtenidas hay que elegir aquellas que pertenecen al campo de definición de la desigualdad inicial.

2. Desigualdades racionales. Examinemos la función

$$f(x) = \frac{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_k)^{n_k}}{(x-b_1)^{m_1}(x-b_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x-b_p)^{m_p}}, \quad (4)$$

donde $n_1, n_2, \ldots, n_k; m_1, m_2, \ldots, m_p$ son números naturales, mientras que a_i y b_j son tales que $a_i \neq b_j$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, k; j = 1, 2, 3, \ldots, p)$. Las desigualdades del tipo $f(x) > 0$ llevan, en



Fig. 6

este caso, el nombre de *racional*. En los puntos $x = a_1$, $x = a_2$, ..., $x = a_k$ la función $f(x)$ se reduce a cero (dichos puntos se denominan *ceros de la función*), los puntos $x = b_1$, $x = b_2$, ..., $x = b_p$ son los puntos de discontinuidad de la función $f(x)$. Si todos

los ceros de la función y los puntos de discontinuidad se marcan en la recta numérica, ellos la dividirán en $k + p + 1$ intervalos. Como sabemos del curso de análisis matemático, dentro de cada uno de esos intervalos la función $f(x)$ es continua y conserva el signo constante. Para establecer este signo es suficiente tomar cualquier punto del intervalo que nos interesa y determinar el signo de la función en dicho punto.

EJEMPLO 1. Resolvamos la desigualdad $\frac{x^2(x-2)^3(x+3)}{(x-4)^7} > 0$.

SOLUCIÓN. La función $f(x) = \frac{x^2(x-2)^3(x+3)}{(x-4)^7}$ se reduce a cero en los puntos $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$ y sufre discontinuidad en el punto $x_4 = 4$. Estos cuatro puntos dividen la recta numérica en cinco intervalos (fig. 6): $]-\infty; -3[$, $]-3; 0[$, $]0; 2[$, $]2; 4[$, $]4; \infty[$. Determinemos el signo de la función $f(x)$ en cada uno de estos intervalos.

En el intervalo $]-\infty; -3[$ tomemos el punto $x = -4$. Tenemos $f(-4) < 0$, de modo que en $]-\infty; -3[$ $f(x) < 0$.

En el intervalo $]-3; 0[$ tomemos el punto $x = -1$. Tenemos $f(-1) > 0$, de modo que en $]-3; 0[$ $f(x) > 0$.

En el intervalo $]0; 2[$ tomemos el punto $x = 1$. Tenemos $f(1) > 0$, de modo que en $]0; 2[$ $f(x) > 0$.

En el intervalo $]2; 4[$ tomemos el punto $x = 3$. Tenemos $f(3) < 0$, de modo que en $]2; 4[$ $f(x) < 0$.

En el intervalo $]4; \infty[$ tomemos el punto $x = 5$. Tenemos $f(5) > 0$, de modo que en $]4; \infty[$ $f(x) > 0$.

Teníamos que resolver la desigualdad $f(x) > 0$. Del razonamiento que hemos realizado queda claro que dicha desigualdad se verifica en los intervalos $]-3; 0[$, $]0; 2[$ y $]4; \infty[$.
La unión de estos intervalos es, precisamente, la solución de la desigualdad dada.

La solución se puede escribir con dos procedimientos:

1) $]-3; 0[\cup]0; 2[\cup]4; \infty,[$;

2) $-3 < x < 0$; $0 < x < 2$; $4 < x < \infty$.

En la práctica, para resolver la desigualdad $f(x) > 0$ ($<$, $\geqslant$, $\leqslant$, respectivamente), donde $f(x)$ es una función de la forma (4), se emplea el llamado método de los intervalos que es un método geométrico de resolución, basado en las tres siguientes afirmaciones, evidentes en suficiente grado:

1) Si c es el mayor de los números a_i, b_j, en el intervalo $]c; \infty[$ la función $f(x)$ es positiva.

2) Si $a_i b_j$ (correspondientemente b_j) es un punto tal que el exponente n_i de la expresión $(x - a_i)^{n_i}$ es un número impar, a la derecha e izquierda de a_i o b_j, la función tiene signos contrarios.

Semejante punto a_i (correspondientemente b_j) recibirá el nombre de *simple*. La afirmación enunciada más arriba quiere decir que al pasar por un punto simple la función $f(x)$ varía su signo.

3) Si a_i (correspondientemente b_j) es un punto tal que el exponente n_i de la expresión $(x - a_i)^{n_i}$ es un número par, a la derecha y la izquierda de a_i (en intervalos adyacentes) la función $f(x)$ tiene iguales signos.

Tal punto a_i (correspondientemente b_j) recibirá el nombre de *doble*. La afirmación enunciada más arriba quiere decir que al pasar por un punto doble la función no varía su signo.

Así, en el ejemplo 1 dos puntos $x = 2$, $x = -3$, $x = 4$ son simples y el punto $x = 0$, doble. Los signos de la función $f(x)$ en los intervalos se muestran en la fig. 7.

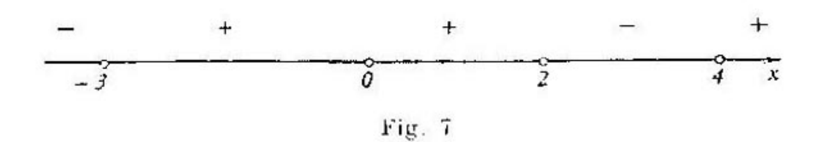


Fig. 7

Así, pues, $f(x) > 0$ en los intervalos $]-3; 0[$, $]0; 2[$, $]4; \infty[$. Esto es lo mismo que lo que obtuvimos más arriba al resolver el ejemplo 1.

El método de intervalos, basado en las afirmaciones enunciadas con anterioridad, se emplea para resolver desigualdades de la forma

$$\frac{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_k)^{n_k}}{(x-b_1)^{m_1}(x-b_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x-b_p)^{m_p}} > 0 \quad (<0). \tag{5}$$

Consiste en lo siguiente:

1) Con redondeles no sombreados en la recta numérica se marcan todos los ceros y puntos de discontinuidad de la función $f(x)$, que entran en el primer miembro de la desigualdad (5).

2) Comenzando sobre la recta numérica, de derecha a izquierda, se traza una curva ondulada que pasa por todos los puntos marcados, teniendo en cuenta que al pasar por un punto simple la curva cruza la recta, mientras que al hacerlo por el punto doble la curva se queda por el mismo lado de la recta numérica.

3) Se eligen los intervalos de acuerdo con el signo de la desigualdad (5) ($f(x) > 0$ allí, donde la curva está sobre la recta numérica, $f(x) < 0$ allí, donde la curva esté debajo de la recta); su unión es la solución de la desigualdad (5).

Para dar facilidad, el punto doble se designa en el diseño con una raya por abajo. La curva descrita más arriba se denominará

curva de signos. En la fig. 8 se muestra la curva de signos de la desigualdad del ejemplo 1.

Señalemos, además, que en las desigualdades no estrictas $f(x) \geqslant 0$ ó bien $f(x) \leqslant 0$, donde $f(x)$ es una función de la forma (4),

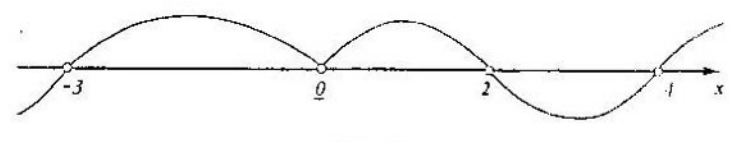


Fig. 8

los ceros de la función se marcan en el diseño con redondeles sombreados y se incluyen en la solución. Los puntos de discontinuidad siempre se representan con redondeles no sombreados y no se incluyen en la solución.

EJEMPLO 2. Resolvamos la desigualdad $\frac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{(2x-3)(4x+5)}<0$.

SOLUCIÓN. Transformemos la desigualdad a la forma

$$\frac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)\cdot 4\left(x+\frac{5}{4}\right)}<0.$$

La variación de los signos de la función $f(x) = \frac{(x+5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2})}{\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{4}\right)}$ se ilustra con ayuda de la curva de signos; aquí todos los ceros y puntos de descontinuidad son puntos simples (fig. 9). Aquellos valores de x con los que $f(x) < 0$ (sombreados),

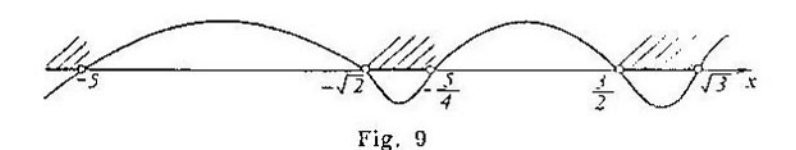


Fig. 9

yacen en los intervalos $]\infty; -5\Big]$, $]-\sqrt{2}; -\frac{5}{4}\Big[$ y $\Big]\frac{3}{2}; \sqrt{3}\Big[$.

La solución de la desigualdad es la conjugación de los indicados intervalos.

EJEMPLO 3. Resolvamos la desigualdad $2x^3-5x^2+2x \leqslant 0$.

SOLUCIÓN. Tenemos $2x(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right) \leqslant 0$ y, a continuación,

$$x(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right) \leqslant 0.$$

Trazamos la línea de signos (fig. 10). Como la desigualdad prefijada no es estricta, ella también se satisface con los valores de x con los que el primer miembro de la desigualdad se reduce a cero. Dichos puntos se designan en la fig. 10 con redondeles sombreados. Así,

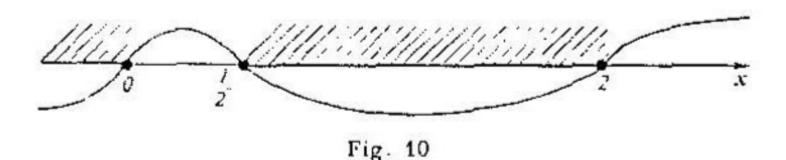


Fig. 10

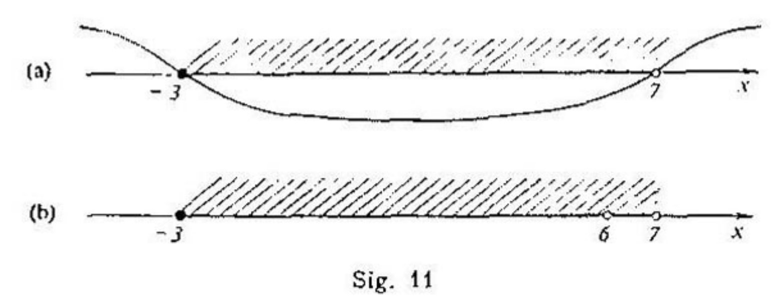
pues, la desigualdad dada tiene las siguientes soluciones: $]-\infty; 0]$ $\cup\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

EJEMPLO 4 Resolvamos la desigualdad $\frac{x^2-3x-18}{13x-x^2-42}\geqslant 0$.

SOLUCIÓN Multipliquemos ambos miembros de la desigualdad por (-1), después de lo cual obtenemos

$$\frac{x^2-3x-18}{x^2-13x+42}\leqslant 0 \quad \text{o bien} \quad \frac{(x-6)(x+3)}{(x-6)(x-7)}\leqslant 0.$$

Simplificando la fracción en el primer miembro por $x-6$, obtenemos $\frac{x+3}{x-7}\leqslant 0$ y, con ayuda de la curva de signos (fig. 11, a),



Sig. 11

hallamos el intervalo $[-3; 7[$. Eliminando del conjunto hallado el valor de $x=6$, como no perteneciente al campo de definición de la desigualdad inicial (fig. 11, b), obtenemos la siguiente solución $[-3; 6[\cup]6; 7[$.

EJEMPLO 5. Resolvamos la desigualdad $\frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1}<1$.

SOLUCIÓN. Tenemos $\frac{x^2-x-6}{x^2-1}-1<0$ y, a continuación, $\frac{x+5}{(x-1)(x+1)}>0$.

Trazamos la curva de signos para la función $f(x)=\frac{x+5}{(x-1)(x+1)}$ (fig. 12). Con su ayuda hallamos la solución de la desigualdad: $]-5;\ -1[\cup]1;\ \infty[$.

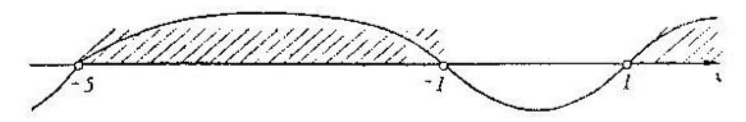


Fig. 12

EJEMPLO 6 Resolvamos la desigualdad

$$\frac{(x-1)^3(x+2)^4(x-3)^5(x+6)}{x^2(x-7)^3}\leqslant 0.$$

SOLUCIÓN. Marquemos en la recta numérica los ceros de la función: 1, —2, 3, —6 (redondeles sombreados) y los puntos de discontinui-

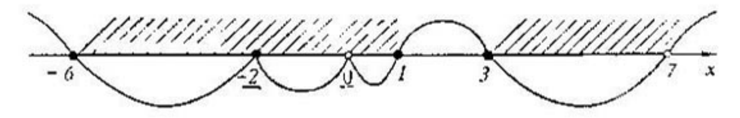


Fig. 13

dad: 0, 7 (redondeles no sombreados), destacamos los puntos dobles: —2; 0 y trazamos la curva de signos (fig. 13). Escribamos la solución:

$$-6\leqslant x\leqslant -2;\ -2\leqslant x<0;\ 0<x\leqslant 1;\ 3\leqslant x<7$$

o, de forma más sencilla, $[-6;\ 0[\cup]0;\ 1]\cup[3;\ 7[$.

EJEMPLO 7. Resolvamos la desigualdad $\frac{3x+4}{x^2-3x+5}<0$.

SOLUCIÓN. El discriminante del denominador $D=9-20<0$. Pero, como sabemos, si el discriminante de un trinomio de segundo grado ax^2+bx+c, donde $a>0$, es negativo, la desigualdad $ax^2+bx+c>0$ se verifica con toda x.

Así, pues, el denominador del primer miembro de la desigualdad dada es positivo con cualesquiera valores de x y, por ello, después de multiplicar ambos miembros de la desigualdad por x^2-3x+5 y, conservando el signo de desigualdad, obtenemos la desigualdad $3x+4<0$, equivalente a la prefijada. Su solución y, por lo tanto, la de la desigualdad dada, es el intervalo numérico $\left]-\infty;\ -\frac{4}{3}\right[$.

3. Sistemas y conjuntos de desigualdades con una variable. Varias desigualdades con una variable forman un *sistema* de desi-

gualdades en el caso cuando se plantea el problema de la búsqueda de aquellos valores de la variable que satisfacen, *simultáneamente*, a cada una de las desigualdades dadas.

Varias desigualdades con una variable forman un *conjunto* de desigualdades en el caso cuando se plantea el problema de la búsqueda de todos los valores de la variable, cada uno de los cuales satisface, *por lo menos, una* de las desigualdades prefijadas.

De lo dicho se desprende que como solución de un sistema de desigualdades sirve la *intersección* de las soluciones de las desigualdades que forman el sistema; la solución de un conjunto es la *unión* de las soluciones de las desigualdades que forman el conjunto (aquí, como más arriba, por solución se entiende la solución general, es decir, el conjunto de todas las soluciones particulares).

Las desigualdades que forman el sistema se unen con llaves. A veces, el sistema de desigualdades puede ser escrito en fila. P. ej., el sistema $\left\{\begin{array}{l} 2x+3<x-4 \\ 2x+3>3x-1 \end{array}\right.$ puede ser escrito del modo siguiente: $3x-1<2x+3<x-4$.

De la definición del sistema de desigualdades se deduce que si la desigualdad $f(x)>g(x)$ es el corolario de las desigualdades $f_1(x)>g_1(x)$ y $f_2(x)>g_2(x)$ (o bien corolario de sólo una de esas desigualdades), el sistema de desigualdades

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x)>g_1(x) \\ f_2(x)>g_2(x) \end{array}\right.$$

es equivalente al siguiente sistema: $\left\{\begin{array}{l} f_1(x)>g_1(x) \\ f_2(x)>g_2(x) \\ f(x)>g(x). \end{array}\right.$

Con otras palabras, si al sistema dado de desigualdades se adjunta una desigualdad-corolario o bien, al contrario, del sistema dado de desigualdades se excluye la desigualdad-corolario, obtenemos un sistema de desigualdades equivalente al prefijado. P. ej., los siguientes sistemas de desigualdades son equivalentes

$$\left\{\begin{array}{l} x^2-5x>3 \\ x^2-5x>7 \\ \dfrac{2x-1}{x+2}<1 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{l} x^2-5x>7 \\ \dfrac{2x-1}{x+2}<1 \end{array}\right.$$

(del primer sistema se ha «excluido» la desigualdad $x^2-5x>3$ que es el corolario de la desigualdad $x^2-5x>7$).

Las desigualdades que forman un conjunto se unen con corchetes. Un conjunto de desigualdades puede escribirse, asimismo, en fila, pero en tal caso se emplea el signo «;».

Una desigualdad no estricta es equivalente a un conjunto formado por la correspondiente desigualdad estricta y una ecuación. P.ej., la desigualdad $f(x) \geqslant g(x)$ es equivalente al conjunto

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) \\ f(x) = g(x). \end{array}\right.$$

Toda «no igualdad» $f(x) \neq g(x)$ también se puede escribir en forma del conjunto de dos desigualdades estrictas:

$$f(x) > g(x);\ f(x) < g(x).$$

Varios sistemas de desigualdades con una variable forman un *conjunto de sistemas de desigualdades* en el caso cuando se plantea el problema de buscar todos aquellos valores de la variable, cada uno de los cuales satisface, por lo menos, uno de los sistemas dados.

EJEMPLO 8. Resolvamos el sistema de desigualdades $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x^2+x-4}{x} < 1 \\ x^2 < 64. \end{array}\right.$

SOLUCIÓN. Para empezar, consideremos la primera desigualdad. Tenemos

$$\frac{x^2+x-4}{x} - 1 < 0, \quad \frac{(x-2)(x+2)}{x} < 0.$$

Con ayuda de la curva de signos (fig. 14) hallamos la solución de esta desigualdad: $]-\infty;\ -2[\ \cup\ ]\ 0;\ 2\ [$.

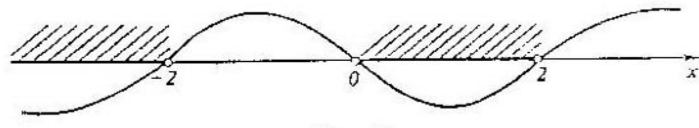


Fig. 14

Resolvemos la segunda desigualdad del sistema inicial. Tenemos $x^2 - 64 < 0$ o bien $(x-8)\cdot(x+8) < 0$.

Con ayuda de la curva de signos (fig. 15) hallamos la solución de esta desigualdad: $]-8;\ 8[$.



Fig 15

Marcando las soluciones obtenidas de las desigualdades primera y segunda en la recta numérica común (fig. 16), hallamos la inter-

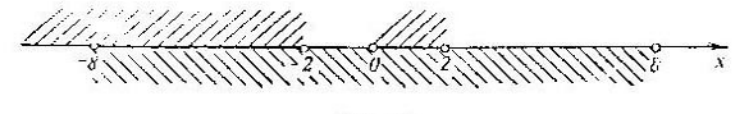


Fig. 16

sección de las soluciones. En la solución escribimos: $]-8; -2[\cup]0; 2[$.

EJEMPLO 9. Hallemos el campo de definición de la función

$$f(x)=\sqrt{\frac{3x-6}{x+2}}+\sqrt{(x^4-5x^3+6x^2)(1-x^2)}.$$

SOLUCIÓN. El problema se reduce a resolver el siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} \frac{3x-6}{x+2}\geqslant 0 \\ (x^4-5x^3+6x^2)(1-x^2)\geqslant 0. \end{cases}$$

Transformemos la primera desigualdad del sistema a la forma $\frac{x-2}{x+2}\geqslant 0$ y, con ayuda de la curva de signos (fig. 17), hallemos la so-

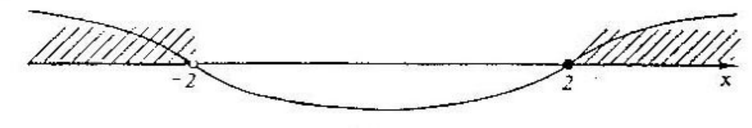


Fig. 17

lución de dicha desigualdad: $]-\infty; -2[\cup]2; \infty[$.

Transformemos la segunda desigualdad del sistema a la forma:

$$x^2(x-2)(x-3)(x-1)(x+1)\leqslant 0.$$

Mediante la curva de signos (fig. 18) hallemos la solución de esta desigualdad: $[-1; 1]\cup[2; 3]$.

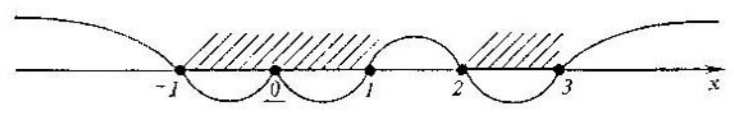


Fig. 18

Marcando en la recta numérica (fig. 19) las soluciones obtenidas de la primera y segunda desigualdades del sistema dado, hallamos la intersección de las soluciones: $]2; 3]$.

EJEMPLO 10. Resolvamos el conjunto de desigualdades

$$\left[\begin{array}{l} x^5 \geqslant 100x^3 \\ \dfrac{(x+9)(5x-x^2-18)}{x^2-18x+48} \geqslant 0. \end{array}\right.$$

SOLUCIÓN. Transformemos la primera desigualdad del conjunto a la forma: $x^3(x-10)(x+10) \geqslant 0$. Mediante la curva de signos

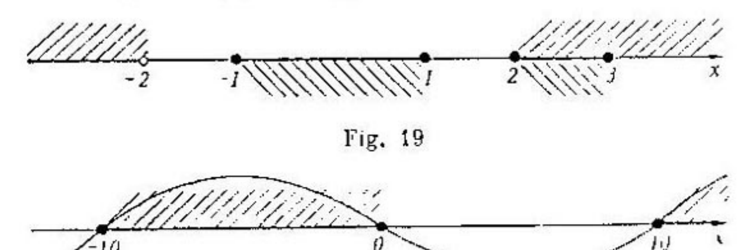


Fig. 19

Fig. 20

(fig. 20) obtenemos la solución de esta desigualdad: $[-10, 0] \cup [10; \infty[$.

Consideremos la segunda desigualdad del conjunto. Tenemos:

$$\frac{(x+9)(x^2-5x+18)}{(x-3)(x-15)} \leqslant 0.$$

Como el discriminante del trinomio de segundo grado $x^2-5x+18$ es negativo, mientras que el coeficiente mayor, positivo,

$$x^2-5x+18>0$$

con todos los valores de x y, por lo tanto, después de dividir ambos miembros de la desigualdad por $x^2-5x+18$ y conservando el signo de desigualdad, obtenemos la desigualdad equivalente:

$$\frac{x+9}{(x-3)(x-15)} \leqslant 0.$$

Con ayuda de la curva de signos (fig. 21) hallamos la solución de la última desigualdad: $]-\infty; -9] \cup]3; 15[$.

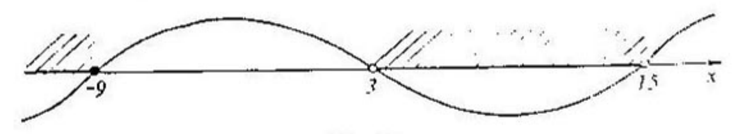


Fig. 21

Uniendo ambas soluciones de cada una de las desigualdades del conjunto (fig. 22), obtenemos: $]-\infty; 0] \cup]3; +\infty[$, es decir, la solución del conjunto.

EJEMPLO 11. Resolvamos el conjunto de sistemas de desigualdades

$$\begin{cases} x-2>0 \\ x^2<16 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x-9<0 \\ 100 \geqslant x^2. \end{cases}$$

La solución del primer sistema es el intervalo numérico]2; 4[.

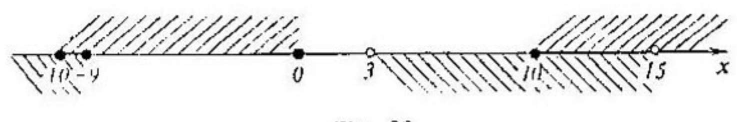


Fig. 22

Del segundo, el intervalo numérico [—10; 3[. Con ayuda de la recta numérica (fig. 23) obtenemos la unión de las soluciones de los sistemas primero y segundo: [—10; 4[, es decir, la solución del conjunto dado de sistemas.

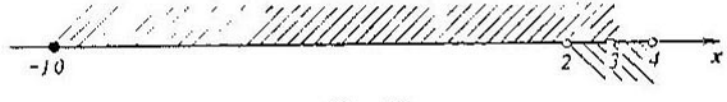


Fig. 23

EJEMPLO 12. Aclaremos con qué valores de a las dos raíces de trinomio de segundo grado $(a-2)x^2-2ax+a+3$ son positivas.

SOLUCIÓN. Como de acuerdo con el planteamiento, el trinomio tiene raíces reales, su discriminante $D \geqslant 0$, es decir, debe verificarse la desigualdad $4a^2-4(a-2)(a+3) \geqslant 0$.

Según el teorema de Viéte tenemos:

$$\begin{cases} x_1x_2=\dfrac{a+3}{a-2} \\ x_1+x_2=\dfrac{2a}{a-2}, \end{cases}$$

donde x_1, x_2 son las raíces del trinomio de segundo grado prefijado. Según el planteamiento ambas raíces son positivas, es decir, $x_1x_2 > 0$, $x_1+x_2>0$.

Como resultado llegamos al sistema de desigualdades

$$\begin{cases} 4a^2-4(a-2)(a+3) \geqslant 0 \\ \dfrac{a+3}{a-2}>0 \\ \dfrac{2a}{a-2}>0 \end{cases}$$

que al resolverlo, obtenemos $\begin{cases} a \leqslant 6 \\ a < -3;\ a > 2 \\ a < 0;\ a > 2, \end{cases}$ de donde hallamos $a < -3,\ 2 < a \leqslant 6$.

EJEMPLO 13. Aclaremos con qué valores de a la desigualdad

$$\frac{x^2-8x+20}{ax^2+2(a+1)x+9a+4}<0$$

se verifica con todo valor de x.

SOLUCIÓN. El trinomio $x^2 - 8x + 20$ tiene el coeficiente mayor positivo y discriminante negativo, por lo que $x^2 - 8x + 20 > 0$ con todas las x y, por ello, el denominador de la fracción dada, o sea $ax^2 + 2(a+1)x + 9a + 4$, debe ser negativo con toda x. Esto es posible si $a < 0$ y $D < 0$, donde D es el discriminante del trinomio $ax^2 + 2(a+1)x + 9a + 4$. Por lo tanto, el problema se reduce a la resolución del sistema de desigualdades $\begin{cases} a<0 \\ 4(a+1)^2 - 4a(9a+4) < 0 \end{cases}$, del que obtenemos $a < -\frac{1}{2}$.

4. Desigualdades que contienen una variable bajo el signo de módulo. Al resolver desigualdades que contienen una variable bajo el signo de módulo, en ocasiones es útil el teorema 4 acerca de la equivalencia de las desigualdades (pág. 145).

Sea, p.ej., necesario resolver la desigualdad $|f(x)| > |g(x)|$. Hagamos uso que si $p(x)$ es cierta función, $|p(x)| \geqslant 0$ y $|p(x)|^2 = (p(x))^2$.

Esto significa, que según el teorema 4 la desigualdad $|f(x)| > |g(x)|$ es equivalente a la desigualdad $(f(x))^2 > (g(x))^2$. Además, a veces es útil emplear la interpretacion geométrica del módulo de un número real. La cuestión radica en que desde el punto geométrico $|a|$ es la distancia desde el punto a de la recta numérica hasta el origen de coordenadas, mientras que $|a - b|$, es la distancia entre los puntos a y b.

EJEMPLO 14. Resolvamos la desiguldad $|x - 1| < 2$.

SOLUCIÓN. *1-er procedimiento.* Como ambos miembros de la desigualdad dada no son negativos con toda x, después de elevar al cuadrado obtenemos la desigualdad $(x-1)^2 < 4$, equivalente a la prefijada. Seguidamente, tenemos: $x^2 - 2x - 3 < 0$, de donde obtenemos la solución: $]-1;\ 3[$.

2-do procedimiento. $|x - 1|$ puede considerarse como la distancia entre los puntos x y 1 en la recta numérica. Por lo tanto, debemos indicar en la recta todos los puntos x tales que están distanciados del punto con la coordenada 1 menos que en 2 unidades (fig. 24). La solución buscada: $]-1;\ 3[$.

3-er procedimiento. Como

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 \text{ si } x-1 \geqslant 0, \\ -(x-1) \text{ si } x-1 < 0, \end{cases}$$

la desigualdad inicial es equivalente al conjunto de dos sistemas:

$$\begin{cases} x-1 \geqslant 0 \\ x-1 < 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x-1 < 0 \\ -(x-1) < 2. \end{cases}$$

Del primer sistema obtenemos $1 \leqslant x < 3$, del segundo, $-1 < x < 1$. Uniendo estas soluciones hallamos la solución de la desigualdad dada: $]-1;\ 3[$.

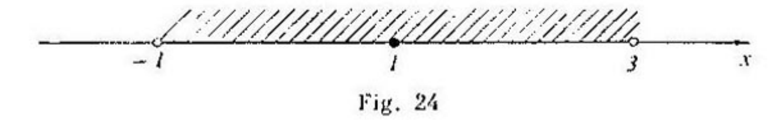


Fig. 24

EJEMPLO 15. Resolvamos la desigualdad $|2x-1| \leqslant |3x+1|$.

SOLUCIÓN. Después de elevar ambos miembros de la desigualdad al cuadrado, obtenemos:
$(2x-1)^2 \leqslant (3x+1)^2$ y, a continuación, $x(x+2) \geqslant 0$, de donde hallamos: $]-\infty;\ -2] \cup [0;\ +\ \infty[$.

EJEMPLO 16. Resolvamos la desigualdad $\left|\frac{2x+3}{3x-2}\right| > 1$.

SOLUCIÓN. Esta desigualdad es equivalente a la desigualdad

$$\left(\frac{2x+3}{3x-2}\right)^2 > 1$$

que puede ser reescrita del modo siguiente:

$$\frac{4x^2+12x+9}{9x^2-12x+4} - > 0 \text{ o bien } \frac{-5x^2+24x+5}{(3x-2)^2} > 0,$$

de donde $\dfrac{5\left(x+\frac{1}{5}\right)(x-5)}{9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2} < 0.$

Con el método de los intervalos (fig. 25) hallamos la solución de la última desigualdad y, al mismo tiempo, de la prefijada: $\left]-\frac{1}{5};\ \frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{2}{3};\ 5\right[$.

EJEMPLO 17. Resolvamos la desigualdad $|x^2-3x+2| \leqslant \leqslant 2x-x^2$.

SOLUCIÓN. La desigualdad es equivalente al siguiente conjunto de sistemas:

$$\begin{cases} x^2-3x+2\geqslant 0 \\ x^2-3x+2\leqslant 2x-x^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2-3x+2<0 \\ -(x^2-3x+2)\leqslant 2x-x^2 \end{cases}$$

que al resolverlo, hallamos sucesivamente

$$\begin{cases} (x-1)(x-2)\geqslant 0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)\leqslant 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} (x-1)(x-2)<0 \\ x-2\leqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\leqslant 1;\ x\geqslant 2 \\ \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 1<x<2 \\ x\leqslant 2, \text{ de donde} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1;\quad x=2;\quad 1<x<2.$$

Uniendo las soluciones halladas, obtenemos: $\left[\frac{1}{2};\ 2\right]$.

EJEMPLO 18. Resolvamos la desigualdad $|x-4|+|2x+6|>10$.

SOLUCIÓN. De acuerdo con la definición de módulo, tenemos $|x-4|=x-4$, si $x\geqslant 4$ y $|x-4|=-(x-4)$, si $x<4$.

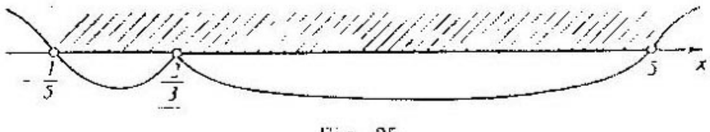


Fig. 25

Es decir, para abrir el signo de módulo en la expresión $|x-4|$ hay que considerar dos posibilidades: $x\geqslant 4$; $x<4$. De forma análoga, $|2x+6|=2x+6$, si $x\geqslant -3$ y $|2x+6|=-(2x+6)$, si $x<-3$. De modo que para abrir el signo de módulo en la expresión $|2x+6|$ hay que examinar también dos posibilidades: $x\geqslant -3$; $x<-3$. Así, pues, necesitamos conocer la posición del punto x con relación a dos puntos 4 y —3 en la recta de coordenadas. Dichos puntos dividen la recta en tres intervalos: $]-\infty;\ -3]$, $[3;\ 4]$, $[4;\ \infty[$. Después de considerar la desigualdad dada en cada uno de estos intervalos, obtenemos el conjunto de tres sistemas:

$$\begin{cases} x\leqslant -3 \\ -(x-4)-(2x+6)>10 \end{cases}; \quad \begin{cases} -3\leqslant x\leqslant 4 \\ -(x-4)+(2x+6)>10 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x\geqslant 4 \\ (x-4)+(2x+6)>10. \end{cases}$$

Del primer sistema hallamos $x < -4$, del segundo, $0 < x \leqslant 4$, del tercero, $x \geqslant 4$. Uniendo las soluciones halladas, obtenemos: $]-\infty; -4[\cup]0; +\infty[$.

5. **Problemas para la composición de desigualdades.**

EJEMPLO 19. Un escolar tenía cierta cantidad de sellos. Le regalaron un álbum para sellos. Si él pega 20 sellos en cada página, el álbum es insuficiente, pero si pega 23 sellos en cada página, por lo menos, una página quedaría vacía. Si al niño le regalaran un álbum absolutamente igual, en cada página del cual estuvieran pegados 21 sellos, él tendría un total de 500 sellos.¿ Cuántas páginas tiene el álbum?

SOLUCIÓN. Introduzcamos dos variables: x es el número de páginas en el álbum; y, el número de sellos que tenía el escolar.

Si el escolar pega 20 sellos en cada página, resultarán pegados $20x$ sellos, lo que según el planteamiento es menos que el número de sellos que tenía el escolar, es decir, $20x < y$. Si él pegara 23 sellos por página, para pegarlos todos sería suficiente $(x - 1)$ páginas, en las que cabrían $23(x - 1)$ sellos. Según el planteamiento este número no es menor que el número de sellos que tiene el escolar, es decir, $23(x - 1) \geqslant y$. Por fin, en el problema se indica que si regalan al muchacho un álbum en el que están pegados $21x$ sellos, en total él tendría 500, es decir, $y + 21x = 500$. De esta forma podemos escribir el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 20x < y \\ 23x - 23 \geqslant y \\ 21x + y = 500. \end{cases}$$

Expresando y de la ecuación del sistema y poniendo el resultado en ambas desigualdades de éste, obtenemos el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} 20x < 500 - 21x \\ 23x - 23 \geqslant 500 - 21x. \end{cases}$$

que al resolverlo nos proporciona $\frac{523}{44} \leqslant x < \frac{500}{41}$.

De acuerdo con el planteamiento x es un número entero. Pero el intervalo indicado sólo contiene un número entero, 12. O sea, en el álbum había 12 páginas.

EJEMPLO 20 El recorrido de A a B lo cubre una balsa en 24 h y una lancha gasta en el recorrido de A a B y viceversa no menos de 10 h. Si la velocidad propia de la lancha se aumenta el 40%, el recorrido de A a B y viceversa ocuparía no más de 7 h. ¿ Cuánto tiempo navega la lancha de A a B y cuánto de B a A?

SOLUCIÓN. Sea x km/h la velocidad de la corriente del río (y, por lo tanto, la de movimiento de la balsa), y km/h, la velocidad propia de la lancha. Entonces, el recorrido de A a B constituye $24x$ km, mientras que el tiempo en que está en movimiento la lancha de A a B y viceversa constituye $\left(\frac{24x}{y+x}+\frac{24x}{y-x}\right)$ h. Si la velocidad propia de la lancha se hace igual a $1,4y$ km/h, la distancia entre A y B y viceversa ocupará $\left(\frac{24x}{1,4y+x}+\frac{24x}{1,4y-x}\right)$ h. Según el planteamiento, el primer tiempo es no menos de 10 h y el segundo, no más de 7 h. Así, pues, llegamos al sistema de desigualdades

$$\begin{cases} \dfrac{24x}{y+x}+\dfrac{24x}{y-x}\geqslant 10 \\ \dfrac{2x}{1,4y+x}+\dfrac{24x}{1,4y-x}\leqslant 7. \end{cases}$$

En cada una de las fracciones que tenemos dividamos el numerador y denominador, término por término, por x e introduzcamos la nueva variable $t=\frac{y}{x}$. Como de acuerdo con el sentido del problema $y>x$, $t>1$. Así, pues, obtenemos un sistema de desigualdades con relación a la variable t

$$\begin{cases} t>1 \\ \dfrac{24}{t+1}+\dfrac{24}{t-1}\geqslant 10 \\ \dfrac{24}{1,4t+1}+\dfrac{24}{1,4t-1}\leqslant 7. \end{cases}$$

Como $t>1$, los denominadores de las fracciones en las desigualdades segunda y tercera de este sistema son positivos y, por ello, eliminando los denominadores en dichas desigualdades y efectuando las transformaciones necesarias, obtenemos

$$\begin{cases} t>1 \\ 5t^2-24t-5\leqslant 0 \\ 49t^2-240t-25\geqslant 0 \end{cases} \quad \text{y, seguidamente} \quad \begin{cases} t>1 \\ 5(t-5)\left(t+\frac{1}{5}\right)\leqslant 0 \\ 49(t-5)\left(t+\frac{5}{49}\right)\geqslant 0. \end{cases}$$

La solución del último sistema es el valor de $t=5$. En el problema hay que hallar el tiempo de desplazamiento de A a B y de B a A. El tiempo consumido para el desplazamiento de A a B se expresa con la fracción $\frac{24}{t+1}$ y, por lo tanto, es igual a 4 h. El tiempo necesario para cubrir la distancia entre B y A se expresa con la fracción $\frac{24}{t-1}$ y, por consiguiente, es igual a 6 h.

EJERCICIOS

Resuelvan las siguientes desigualdades:

835. $x(x-1)^2 > 0$. 836. $(2-x)(3x+1)(2x-3) > 0$.

837. $(3x-2)(x-3)^3(x+1)^3(x+2)^4 < 0$.

838. $x^2-25 < 0$. 839. $x^3-64x > 0$. 840. $x^2+10 \leqslant 7x$.

841. $x^2-7x < 3$. 842. $-x^2-16+8x \geqslant 0$.

843. $x^2+5x+8 > 0$. 844. $x^4+8x^3+12x^2 \geqslant 0$.

845. $(x-1)(x^2-3x+8) < 0$.

846. $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1) \leqslant 0$.

847. $\dfrac{(x-1)(3x-2)}{5-2x} > 0$. 848. $\dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(2x-1)(x+4)(3-x)} > 0$.

849. $(16-x^2)(x^2+4)(x^2+x+1)(x^2-x-3) \leqslant 0$.

850. $(x^2-4)(x^2-4x+4)(x^2-6x+8)(x^2+4x+4) < 0$.

851. $(2x^2-x-5)(x^2-9)(x^2-3x) \leqslant 0$.

852. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+35} > 0$. 853. $\dfrac{x^2-4x-2}{9-x^2} < 0$.

854. $\dfrac{x^3+x^2+x}{9x^2-25} \geqslant 0$. 855. $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5} < 0$.

856. $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x+8} \leqslant 0$. 857. $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+x-1} < 0$.

858. $\dfrac{3x-2}{2x-3} < 3$. 859. $\dfrac{7x-4}{x+2} \geqslant 1$. 860. $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{3}$.

861. $\dfrac{2x^2+18x-4}{x^2+9x+8} > 2$. 862. $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x+3} > \dfrac{3}{x+2}$.

863. $\dfrac{x+1}{x-2} > \dfrac{3}{x-2} - \dfrac{1}{2}$. 864. $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} > 3$.

865. $\dfrac{1}{3x-2-x^2} > \dfrac{3}{7x-4-3x^2}$.

866. $\dfrac{3}{6x^2-x-12} < \dfrac{25x-47}{10x-15} - \dfrac{3}{3x+4}$.

867. $\dfrac{2-x}{x^3+x^2} \geqslant \dfrac{1-2x}{x^3-3x^2}$.

868. $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-x+1} \leqslant \dfrac{1-2x}{x^3+1}$.

869. $\dfrac{10(5-x)}{3(x-4)} - \dfrac{11}{3} \cdot \dfrac{6-x}{x-4} \geqslant \dfrac{5(6-x)}{x-2}$.

Resuelvan los siguientes sistemas de desigualdades:

870. $\begin{cases} \dfrac{3x+5}{7} + \dfrac{10-3x}{5} > \dfrac{2x+7}{3} - \dfrac{148}{21} \\ \dfrac{7x}{3} - \dfrac{11(x+1)}{6} > \dfrac{3x-1}{3} - \dfrac{13-x}{2}. \end{cases}$

871. $\begin{cases} 3 - \dfrac{3-7x}{10} + \dfrac{x+1}{2} > 4 - \dfrac{7-3x}{2} \\ 7(3x-6) + 4(17-x) > 11 - 5(x-3). \end{cases}$

872. $\begin{cases} \dfrac{2x-11}{4} + \dfrac{19-2x}{2} < 2x \\ \dfrac{2x+15}{9} > \dfrac{1}{5}(x-1) + \dfrac{x}{3}. \end{cases}$ 873. $\begin{cases} x^2-4x+3 < 0 \\ 2x-4 < 0. \end{cases}$

874. $\begin{cases} 2x^2+2<5x \\ x^2 \geqslant x. \end{cases}$ 875. $\begin{cases} x^2<9 \\ x^2>7. \end{cases}$

876. $\begin{cases} \dfrac{x+3}{x-2}<1 \\ \dfrac{2x+3}{3x-2}<2. \end{cases}$ 877. $4x-2<x^2+1<4x+6.$

878. $\begin{cases} (2x+3)(2x+1)(x-1)<0 \\ (x+5)(x+1)(1-2x)(x-3)>0. \end{cases}$

879. $\begin{cases} (x^2+12x+35)(2x+1)(3-2x)\geqslant 0 \\ (x^2-2x-8)(2x-1)\geqslant 0. \end{cases}$

880. $\begin{cases} \dfrac{x+3}{3-x}<2 \\ x^3<16x \\ 4\geqslant x^2. \end{cases}$ 881. $\begin{cases} \dfrac{(x+2)(x^2-3x+8)}{x^2-9}\leqslant 0 \\ \dfrac{1-x^2}{x^2+2x-8}\geqslant 0. \end{cases}$

882. $\dfrac{5x-7}{x-5}<4-\dfrac{x}{5-x}+\dfrac{3x}{x^2-25}<4.$

883. $\begin{cases} \dfrac{(x-1)^3(x^2-4)^2(x^2-9)^3(x^2+1)}{(1-3x)(x^2-x-6)(x^2-3x+16)}<0 \\ \dfrac{2x^2+x-16}{x^3+x}<1. \end{cases}$

Hallen los campos de definición de las siguientes funciones:

884. $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x^2-6x-16}{x^2-12x+11}}+\dfrac{2}{\sqrt{x^2-49}}.$

885. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{3x-7-8x^2}}+\sqrt{4x^2-1}.$

886. $f(x)=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x^2-x+1)}{x^3-1}}+\log(x^2-4x+4).$

887. $f(x)=\sqrt[6]{9-\left(\dfrac{4x-22}{x-5}\right)^2}+\dfrac{1}{\log_3(x-5)}.$

888. $f(x)=\sqrt[12]{\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-4x+3}}+\sqrt{3x-5}.$

889. $f(x)=\log\dfrac{(x^2+4x+4)(4-x^2)}{x^2+2x+5}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt[4]{8x^2-x^3-15x}.$

Resuelvan los siguientes conjuntos de desigualdades y sistemas de desigualdades:

890. $(x-1)(x-2)(x-3)<0;\ x^2<1.$

891. $\dfrac{3x-2}{x-3}>0;\ \dfrac{4x-1}{5x-2}<0.$

892. $x^2-5x+8\leqslant 0;\ x^2-3x+6<0;\ x^2<1.$

893. $5x-20\leqslant x^2\leqslant 8x;\ 1<\dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1}<2.$

894. $\begin{cases} x^2-5x+6>0 \\ \dfrac{3x-21}{x^2+x+4}<0 \end{cases};\quad \begin{cases} 2x+3>1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}>0 \end{cases};\quad \begin{cases} \dfrac{x^2+9x-20}{11x-x^2-30}\leqslant -1 \\ x^2+18>5x. \end{cases}$

895. ¿Con qué valores de a el trinomio de segundo grado $x^2 + 2(a+1)x + 9a - 5$, a) no tiene raíces reales; b) sólo tiene raíces negativas; c) sólo tiene raíces positivas?

896. ¿Con qué valores de a el trinomio de segundo grado $(a^2 - a - 2)x^2 + 2ax + a^3 - 27$ tiene raíces de signos opuestos?

897. ¿Con que valores de a la desigualdad $\frac{x^2 + ax - 1}{2x^2 - 2x + 3} < 1$ se verifica con toda x?

898. ¿Con qué valores de a el sistema de desigualdades $-6 < \frac{2x^2 + ax - 4}{x^2 - x + 1} < 4$ se verifica con toda x?

Resuelvan las siguientes desigualdades:

899. $|x+5| > 11$. 900. $|2x-5| < 3$.
901. $|3x-1| \geqslant 5$. 902. $|2x-4| \leqslant 1$.
903. $|2x-1| < |4x+1|$. 904. $|1-3x| - |2x+3| \geqslant 0$.
905. $\left|-\frac{5}{x+2}\right| < \left|\frac{10}{x-1}\right|$. 906. $|1-2x| > 3-x$.
907. $|x+8| \leqslant 3x-1$. 908. $|4-3x| \geqslant 2-x$.
909. $|2x-3| \geqslant 2x-3$. 910. $|5x^2-2x+1| < 1$.
911. $|6x^2-2x+1| \leqslant 1$. 912. $|-2x^2+3x+5| > 2$.
913. $\left|\frac{x+2}{2x-3}\right| < 3$. 914. $\left|\frac{2x-3}{x^2-1}\right| \geqslant 2$.
915. $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| > 1$. 916. $\left|\frac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right| \leqslant 3$.
917. $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \geqslant 1$. 918. $x^2+2|x|-3 \leqslant 0$.
919. $x^2+5|x|-24 > 0$. 920. $|x^2-3x-15| < 2x^2-x$
921. $|x^2+x+10| \leqslant 3x^2+7x+2$.
922. $|2x^2+x+11| > x^2-5x+6$.
923. $|4x^2-9x+6| > -x^2+x-3$.
924. $\frac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geqslant 2$. 925. $|x-6| > |x^2-5x+9|$.
926. $\frac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9} < 0$. 927. $\frac{x^2-|x|-12}{x-3} \geqslant 2x$.
928. $|x|+|x-1| < 5$. 929. $|x+1|+|x-2| > 5$.
930. $|2x+1|-|5x-2| \geqslant 1$.
931. $|3x-1|+|2x-3|-|x+5| < 2$.
932. $|x-1|+|2-x| > 3+x$.
933. $||2x+1|-5| > 2$. 934. $||x-3|+1| \geqslant 2$.
935. $||x-1|+x| < 3$. 936. $||x-2|-x+3| < 5$.
937. $|2x-|3-x|-2| \leqslant 4$.
938. $\left|\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+4}\right| + \left|\frac{x-1}{x-2}\right| - 12 < 0$.

Resuelvan los problemas:

939. En dos cajones hay más de 29 piezas iguales. El número de piezas en el primer cajón, disminuido en 2, más de 3 veces sobrepasa el número de piezas en el segundo cajón. El número triplicado de piezas en el primer

cajón supera el número doblado de piezas en el segundo cajón, pero no más que en 60. ¿Cuántas piezas hay en cada cajón?

940. En dos brigadas, conjuntamente, hay más de 27 personas. El número de miembros de la primera brigada más de 2 veces sobrepasa el número de miembros de la segunda brigada, disminuido en 12. El número de miembros de la segunda brigada más de 9 veces sobrepasa el número de miembros de la primera brigada, disminuido en 10. ¿Cuántas personas hay en cada brigada?

941. Si los pioneros de un campamento se forman en una columna con 8 personas en cada fila, una de las filas quedará incompleta. Si se forman con 7 personas en cada fila, habrá dos filas más, pero todas serán completas. Pero, si la formación se realiza con 5 personas en cada fila, habrá 7 filas más, pero una de ellas será incompleta. ¿Cuántos pioneros hay en el campamento?

942. Hay cierta cantidad de alambre. Si él se enrolla en bobinas que contengan 800 m de alambre cada una, 1 bobina no estará enrollada por completo. Lo mismo pasará si sólo empleamos bobinas que contengan 900 m de alambre, con la particularidad de que hará falta 3 bobinas menos. Pero, si el alambre se enrolla sólo en bobinas de una capacidad de 1100 m, se necesitarán 6 bobinas menos, pero todas ellas estarán ocupadas por completo. ¿Cuántos metros de alambre había?

943. Si un líquido se echa en botellas de 40 l de capacidad, con ello una botella quedará no del todo llena. Si ese mismo líquido se echa en botellas de 50 l de capacidad, se necesitarán 5 botellas menos y todas ellas estarán llenas. Si el líquido se echa en botellas de 70 l de capacidad se necesitarán 4 botellas menos, pero, de nuevo, una botella no estará llena del todo. ¿Cuántos litros de líquido había?

944. A dos brigadas con un efectivo total de 18 personas fue encargado organizar la guardia continua de 24 horas, cada vez con una persona, en el transcurso de 3 días. Los primeros dos días llevaron la guardia los miembros de la primera brigada, dividiendo entre sí, por partes iguales, todo eso tiempo. Es conocido, que en la segunda brigada había 3 muchachas y, los demás muchachos, con la particularidad de que las primeras hicieron guardia 1 hora cada una y los segundos, dividieron el tiempo restante entre ellos, por partes iguales. Al calcular los resultados, resultó que la suma de horas de guardia de cada muchacho de la segunda brigada y de cualquier miembro de la primera, era menor que 9 h. ¿Cuántas personas había en cada brigada?

945. Al comprar varios libros iguales y cuadernos del mismo tipo, pagaron por los primeros 10 rublos 56 kopeks y por los segundos, 56 kopeks. Fueron comprados 6 libros más que cuadernos. ¿Cuántos libros compraron si el precio de un libro es 1 rublo mayor que el de un cuaderno?

946. Un grupo de 30 estudiantes daba los exámenes. Con ello se ponían las notas: 2, 3, 4, 5. La suma de las notas obtenidas era igual a 93, con la particularidad de que «treses» hubo más que «cincos» y menos que «cuatros». Además, el número de «cuatros» se dividía por 10, el número de «cincos» era par. ¿Cuántas notas de cada tipo recibió el grupo?

947. Un grupo de estudiantes decidió comprar un magnetófono de un precio desde 170 hasta 195 rublos. Pero, en el último momento dos estudiantes se negaron a participar en la compra y, por ello, cada uno de los restantes tuvo que dar 1 rublo más. ¿Cuánto costó el magnetófono?

948. Un artículo de superior calidad es más caro que un artículo de primera calidad, en cuanto éste es más caro que un artículo de segunda calidad, pero esta diferencia en el precio no sobrepasa el 40% del precio del artículo de primera calidad. La empresa pagó 9600 rublos por los artículos de superior calidad y esa misma cantidad por los artículos de segunda calidad. La cantidad total de todos los artículos comprados constituía 1400 unidades. ¿Cuánto cuesta un artículo de primera calidad?

§ 17. Desigualdades irracionales

Al resolver desigualdades irracionales se utilizan los mismos procedimientos que para la resolución de ecuaciones irracionales: elevación de ambos miembros de la desigualdad a una misma potencia natural, introducción de nuevas variables (auxiliares), etc. Pero la diferencia de principio entre la resolución de desigualdades irracionales y ecuaciones irracionales, consiste en que al resolver las desigualdades la comprobación por sustitución, por regla, es irrealizable, ya que, generalmente, la solución de la desigualdad es un conjunto infinito. Esto quiere decir que al resolver desigualdades (y no sólo irracionales) hay que prestar atención a que las transformaciones que se realizan conduzcan a una desigualdad equivalente.

Cualquier desigualdad irracional, que contiene una variable bajo el signo de la raíz cuadrada, se reduce, en fin de cuentas, a la desigualdad de la forma $\sqrt{f(x)} < g(x)$ o bien $\sqrt{f(x)} > g(x)$. Por lo tanto, primeramente, examinemos el problema de la resolución de desigualdades del indicado tipo.

Consideremos la desigualdad

$$\sqrt{f(x)} < g(x). \qquad (1)$$

Está claro, que toda resolución de esta desigualdad es, simultáneamente, la solución de la desigualdad $f(x) \geqslant 0$ (con esta condición queda determinado el primer miembro de la desigualdad) y de la desigualdad $g(x) > 0$ (ya que $g(x) > \sqrt{f(x)} \geqslant 0$).

Así, pues, la desigualdad (1) es equivalente al sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) > 0 \\ \sqrt{f(x)} < g(x), \end{cases}$$

donde $f(x) \geqslant 0$ y $g(x) > 0$ son los corolarios de la desigualdad (1).

Como en el conjunto, definido por las primeras dos desigualdades de este sistema, ambos miembros de la tercera desigualdad del sistema sólo toman valores positivos, su elevación al cuadrado es, en el indicado conjunto, una transformación equivalente de la desigualdad (1). De este modo, llegamos a la conclusión de que la desigualdad (1) es equivalente al

sistema de desigualdades: $\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < (g(x))^2. \end{cases}$

De forma análoga la desigualdad $\sqrt{f(x)} \leqslant g(x)$ es equivalente al sistema de desigualdades: $\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) \geqslant 0 \\ f(x) \leqslant (g(x))^2. \end{cases}$

Ahora consideremos la desigualdad de la forma

$$\sqrt{f(x)} > g(x). \tag{2}$$

Ella es equivalente al sistema de desigualdades: $\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ \sqrt{f(x)} > g(x), \end{cases}$

pero a diferencia del caso anterior, $g(x)$ puede tomar tanto valores positivos como negativos. Por ello, después de considerar el sistema (2), en cada uno de los dos casos $g(x) < 0$ y $g(x) \geqslant 0$, obtenemos el conjunto de sistemas:

$$\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geqslant 0 \\ \sqrt{f(x)} > g(x) \end{cases}; \quad \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) \geqslant 0 \\ \sqrt{f(x)} > g(x). \end{cases}$$

En el primero de estos sistemas la última desigualdad puede omitirse como corolario de las dos primeras; en el segundo sistema ambos miembros de la última desigualdad pueden elevarse al cuadrado.

Así, pues, la desigualdad (2) es equivalente al conjunto de dos sistemas de desigualdades:

$$\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) \geqslant 0 \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases}$$

Señalemos que la segunda desigualdad del segundo sistema puede omitirse, ya que ella es el corolario de la última desigualdad del sistema.

EJEMPLO 1. Resolvamos la desigualdad $\sqrt{2x-1} < x+2$.

SOLUCIÓN. La desigualdad dada es del tipo (1). Por esta razón, ella es equivalente al sistema de desigualdades: $\begin{cases} 2x-1 \geqslant 0 \\ x+2 > 0 \\ 2x-1 < (x+2)^2. \end{cases}$

es decir, el sistema $\begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2} \\ x > -2 \\ x^2+2x+5 > 0. \end{cases}$

Como el trinomio de segundo grado $x^2 + 2x + 5$ tiene discriminante negativo y coeficiente mayor positivo, él es positivo con todos

los valores de x. Por ello, la solución del último sistema, es decir, de la desigualdad dada $\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right[$.

EJEMPLO 2. Resolvamos la desigualdad $\sqrt{(x+2)(x-1)} \geqslant 2(x+2)$.

SOLUCIÓN. Como la desigualdad dada es del tipo (2), ella es equivalente al conjunto de sistemas:

$$\begin{cases} (x+2)(x-1) \geqslant 0 \\ 2(x+2) < 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} (x+2)(x-1) \geqslant 0 \\ 2(x+2) \geqslant 0 \\ (x+2)(x-1) \geqslant (2(x+2))^2. \end{cases}$$

Del primer sistema hallamos $x < -2$, del segundo, $x = -2$. Uniendo las soluciones de los sistemas del conjunto, obtenemos $]-\infty;\ -2]$.

EJEMPLO 3. Resolvamos la desigualdad

$$\sqrt{3x} - \sqrt{2x+1} \geqslant 1. \tag{3}$$

SOLUCIÓN. La desigualdad (3) es equivalente al siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x \geqslant 0 \\ 2x+1 \geqslant 0 \\ \sqrt{3x} - \sqrt{2x+1} \geqslant 1. \end{cases} \tag{4}$$

Es conveniente reescribir la última desigualdad del sistema (4) en la forma $\sqrt{3x} \geqslant 1 + \sqrt{2x+1}$, en donde ambos miembros son positivos y, por lo tanto, la elevación al cuadrado de los dos miembros de esta igualdad será una transformación equivalente. Así, pues, del sistema (4) pasamos al siguiente sistema equivalente a él:

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ (\sqrt{3x})^2 \geqslant (1+\sqrt{2x+1})^2 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \sqrt{2x+1} \leqslant \frac{x}{2} - 1. \end{cases}$$

A continuación, tenemos $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ \frac{x}{2} - 1 \geqslant 0 \\ 2x+1 \leqslant \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2, \end{cases}$

de donde obtenemos $[12;\ +\infty[$ que es la solución del último sistema y, al mismo tiempo, de la desigualdad (3).

EJEMPLO 4. Resolvamos la desigualdad

$$\sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1} > 8. \tag{5}$$

SOLUCIÓN. La desigualdad (5) es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 2x+5 \geqslant 0 \\ x-1 \geqslant 0 \\ \sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1} > 8. \end{cases} \quad (6)$$

Ya que ambos miembros de la última desigualdad del sistema (6) sólo toman valores negativos, el sistema (6) es equivalente a tal sistema:

$$\begin{cases} 2x+5 \geqslant 0 \\ x-1 \geqslant 0 \\ (\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1})^2 > 64 \end{cases}$$

o bien

$$\begin{cases} x \geqslant 1 \\ 2\sqrt{2x^2+3x-5} > 60-3x. \end{cases} \quad (7)$$

La segunda desigualdad del sistema (7) es del tipo (2), por lo que (7) es equivalente al siguiente conjunto de sistemas:

$$\begin{cases} x \geqslant 1 \\ 60-3x \geqslant 0 \\ x^2-372x+3620 < 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant 1 \\ 60-3x < 0. \end{cases}$$

Notemos que con $x \geqslant 1$ la desigualdad $2x^2+3x-5 \geqslant 0$ es cierta (ya que $2x^2+3x-5=(2x+5)(x-1)$), por lo que el último conjunto de sistemas de desigualdades es equivalente al conjunto:

$$\begin{cases} x \geqslant 1 \\ x \leqslant 20 \\ (x-10)(x-362) < 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x > 20. \end{cases}$$

Habiendo resuelto este conjunto, obtenemos: $10 < x \leqslant 20$; $x > 20$. Uniendo estos resultados, obtenemos $]10; +\infty[$, que es la solución de la desigualdad (5).

EJEMPLO 5. Resolvamos la desigualdad

$$x^2+5x+4 < 5\sqrt{x^2+5x+28}. \quad (8)$$

SOLUCIÓN. Haciendo $y=\sqrt{x^2+5x+28}$, hallamos que $x^2+5x+4=y^2-24$. Entonces, la desigualdad (8) se transforma a la forma $y^2-5y-24<0$ y, a continuación, $(y-8)(y+3)<0$, de donde obtenemos $-3<y<8$. Hemos llegado al siguiente sistema de desigualdades:

$$-3 < \sqrt{x^2+5x+28} < 8.$$

Como $\sqrt{x^2+5x+28} \geqslant 0$ con todos los valores tolerables de x, con mayor razón $\sqrt{x^2+5x+28} > -3$ con toda x del campo de definición de la desigualdad (8) y, por lo tanto, es suficiente resolver la desigualdad

$$\sqrt{x^2+5x+28} < 8.$$

Esta desigualdad es equivalente al sistema $0 \leqslant x^2+5x+28 < < 64$. Como la desigualdad $x^2+5x+28 \geqslant 0$ se cumple con toda x (el trinomio de segundo grado $x^2+5x+28$ tiene discriminante negativo y coeficiente mayor positivo), el último sistema es equivalente a la desigualdad

$$x^2+5x-36 < 0 \text{ ó bien } (x+9)(x-4) < 0,$$

de donde hallamos: $]-9; 4[$, que es la solución de la desigualdad (8).

EJEMPLO 6. Resuelvan la desigualdad

$$\frac{1}{4}x > (\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1). \qquad (9)$$

SOLUCIÓN. Examinemos la expresión $\varphi(x) = \sqrt{1+x}+1$. Como $\varphi(x) > 0$ con todo valor tolerable de x, si ambos miembros de la desigualdad (9) se multiplican por $\varphi(x)$ y se conserva el signo de desigualdad (9), obtendremos una desigualdad equivalente

$$\frac{1}{4}x(\sqrt{1+x}+1) > (\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1)(\sqrt{1+x}+1).$$

A continuación, tendremos:

$$\frac{1}{4}x(\sqrt{1+x}+1) > ((\sqrt{1+x})^2-1)(\sqrt{1-x}+1),$$

$$\frac{1}{4}x(\sqrt{1+x}+1) > x(\sqrt{1-x}+1),$$

$$x(\sqrt{1+x}+1-4(\sqrt{1-x}+1)) > 0,$$

$$x(\sqrt{1+x}-4\sqrt{1-x}-3) > 0. \qquad (10)$$

La desigualdad (10) es equivalente al conjunto de sistemas de desigualdades:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{1+x} > 4\sqrt{1-x}+3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x < 0 \\ \sqrt{1+x} < 4\sqrt{1-x}+3, \end{cases}$$

que, a su vez, es equivalente al conjunto:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1+x \geqslant 0 \\ 1-x \geqslant 0 \\ \sqrt{1+x} > 4\sqrt{1-x}+3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x < 0 \\ 1+x \geqslant 0 \\ 1-x \geqslant 0 \\ \sqrt{1+x} < 4\sqrt{1-x}+3 \end{cases}$$

o bien
$$\begin{cases} 0 < x \leqslant 1 \\ \sqrt{1+x} > 4\sqrt{1-x}+3 \end{cases}; \quad \begin{cases} -1 \leqslant x < 0 \\ \sqrt{1+x} < 4\sqrt{1-x}+3. \end{cases} \qquad (11)$$

El primer sistema del conjunto (11) no tiene soluciones. En efecto, si $0 < x \leqslant 1$, $\sqrt{1+x} \leqslant \sqrt{2}$, entonces $\sqrt{1+x} < 3$ y, con mayor razón, $\sqrt{1+x} < 4\sqrt{1-x}+3$, lo que contradice a la segunda desigualdad del sistema. El segundo miembro del conjunto (11) tiene la solución $-1 \leqslant x < 0$, ya que es fácil observar que con estas x la segunda desigualdad del sistema es cierta (en efecto, si $-1 \leqslant x < 0$, $\sqrt{1+x} < 1$ y, entonces, con mayor razón, $\sqrt{1+x} < < 4\sqrt{1-x}+3$).

Así, pues, la desigualdad (9) tiene las siguientes soluciones: $[-1; 0[$.

EJEMPLO 7. Resolvamos la desigualdad

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x} > \sqrt{x-1}-\sqrt{6-x}. \qquad (12)$$

SOLUCIÓN. La ofrecida desigualdad es equivalente al siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} x-2 \geqslant 0 \\ 3-x \geqslant 0 \\ x-1 \geqslant 0 \\ 6-x \geqslant 0 \\ \sqrt{x-2}+\sqrt{3-x} > \sqrt{x-1}-\sqrt{6-x} \end{cases}$$

o bien
$$\begin{cases} 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ \sqrt{x-2}+\sqrt{3-x} > \sqrt{x-1}-\sqrt{6-x}. \end{cases} \qquad (13)$$

Como $2 \leqslant x \leqslant 3$, $x-1 \leqslant 2$ y, por lo tanto, $\sqrt{x-1} \leqslant \sqrt{2}$. Seguidamente, $6-x \geqslant 3$, por lo que $\sqrt{6-x} \geqslant \sqrt{3}$.

Así, pues, $\sqrt{x-1}-\sqrt{6-x} \leqslant \sqrt{2}-\sqrt{3}$ y, con mayor razón, $\sqrt{x-1}-\sqrt{6-x} < 0$.

Pero $\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x} > 0$ y, por consiguiente, la segunda desigualdad del sistema (13) se verifica con todo valor tolerable de x del campo de definición de la desigualdad (12), es decir, el sistema (13) y, junto con él, la desigualdad (12) tienen la solución $[2; 3]$.

EJERCICIOS

Resuelvan las siguientes desigualdades:

949. $\sqrt{2x+1}<5$. 950. $\sqrt{3x-2}>1$.

951. $\sqrt{\frac{x+3}{4-x}}\geqslant 2$. 952. $\sqrt{\frac{2x-1}{3x-2}}\leqslant 3$.

953. $\sqrt{2x+10}<3x-5$. 954. $\sqrt{(x-3)(x+1)}>3(x+1)$.

955. $\sqrt{(x+4)(2x-1)}<2(x+4)$. 956. $\sqrt{(x+2)(x-5)}<8-x$.

957. $\sqrt{x^2-x-12}<x$. 958. $\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}>0$.

959. $\sqrt{9x-20}<x$. 960. $\sqrt{x^2-4x}>x-3$.

961. $\sqrt{3x^2-22x}>2x-7$. 962. $\sqrt{x^2-5x+6}\leqslant x+4$.

963. $\sqrt{2x^2+7x+50}\geqslant x-3$. 964. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\leqslant 1$.

965. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}\geqslant 2$. 966. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\leqslant 1$.

967. $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-4}-\sqrt{4x+5}<0$.

968. $2\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\geqslant 2\sqrt{x-3}$.

969. $\sqrt{x-3}+\sqrt{1-x}>\sqrt{8x-5}$.

970. $\sqrt{17-4x}+\sqrt{x-5}\leqslant\sqrt{13x+1}$.

971. $\sqrt{x+6}>\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-5}$.

972. $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+3}-2\sqrt{x}\geqslant 0$.

973. $\sqrt{2\sqrt{7}+x}-\sqrt{2\sqrt{7}-x}>\sqrt[4]{28}$.

974. $x^2+\sqrt{x^2+11}<31$. 975. $\frac{2}{x}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{3}{4}}$.

976. $\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}<x-8$. 977. $\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}-\sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}\geqslant\frac{7}{12}$.

978. $(x+5)(x-2)+3\sqrt{x(x+3)}>0$.

979. $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2\leqslant 3x+7$.

980. $2x^2-\sqrt{(x-3)(2x-7)}<13x+9$.

981. $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}<x+1$. 982. $(1+x^2)\sqrt{x^2+1}>x^2-1$.

983. $\sqrt[3]{x+5}+2>\sqrt[3]{x-3}$. 984. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}<2-\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$.

985. $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{6-x}\geqslant\sqrt{2}$. 986. $\sqrt{4-4x^3+x^6}>x-\sqrt[3]{2}$.

987. $\sqrt{x^4-2x^2+1}>1-x$. 988. $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$.

989. $\frac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$. 990. $(x-3)\sqrt{x^2-4}\leqslant x^2-9$.

991. $\frac{6x}{x-2}-\sqrt{\frac{12x}{x-2}}-2\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}}>0$.

992. $\frac{2}{2+\sqrt{4-x^2}}+\frac{1}{2-\sqrt{4-x^2}}>\frac{1}{x}$.

993. $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\frac{5}{\sqrt{x-3}}$.

994. $\sqrt{x^2+3x+4}+\sqrt{x+1}>-3$.
995. $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}<1$.

Resuelvan las siguientes ecuaciones:

996. $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1$.
997. $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1$.
998. $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=2$.

§ 18. Desigualdades exponenciales

La resolución de las desigualdades de la forma

$$a^{f(x)}>a^{g(x)},$$

donde a es un número positivo distinto de 1 (ellas se denominan *exponenciales*), se basa en los siguientes teoremas:

TEOREMA 1. *Si $a>1$, la desigualdad $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ es equivalente a la desigualdad $f(x)>g(x)$.*

TEOREMA 2. *Si $0<a<1$, la desigualdad $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ es equivalente a la desigualdad $f(x)<g(x)$.*

EJEMPLO 1. Resolvamos la desigualdad

$$\sqrt[3]{\frac{3x-1}{2^{x-1}}}<8^{\frac{x-3}{3x-7}}. \qquad (1)$$

SOLUCIÓN. Transformemos la desigualdad (1) a la forma

$$2^{\frac{3x-1}{3(x-1)}}<2^{\frac{3(x-3)}{3x-7}}.$$

Según el teorema 1 la desigualdad (1) es equivalente a

$$\frac{3x-1}{3(x-1)}<\frac{3(x-3)}{3x-7} \qquad (2)$$

(las desigualdades (1) y (2) tienen igual sentido). De la desigualdad (2) obtenemos consecutivamente:

$$\frac{3x-1}{3x-3}-\frac{3x-9}{3x-7}<0,\quad \frac{12x-20}{(3x-3)(3x-7)}<0,\quad \frac{x-\frac{5}{3}}{(x-1)\left(x-\frac{7}{3}\right)}<0.$$

Habiendo resuelto la última desigualdad según el método de los intervalos, obtenemos (fig. 26): $]-\infty;1[\ \cup\ ]\frac{5}{3};\frac{7}{3}[$, que es la solución de (1).

EJEMPLO 2. Resolvamos la desigualdad

$$(0{,}04)^{5x-x^2-8}<625. \qquad (3)$$

SOLUCIÓN. Como $0{,}04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} = 5^{-2}$, la desigualdad dada se puede escribir en la forma

$$(5^{-2})^{5x-x^2-8} < 5^4.$$

De acuerdo con el teorema 2, la desigualdad (3) es equivalente a la desigualdad

$$2x^2 - 10x + 16 < 4, \tag{4}$$

(las desigualdades (3) y (4) tienen el mismo sentido). Después de resolver la desigualdad (4) obtenemos: $]2;\ 3[$ que es la solución de (3).

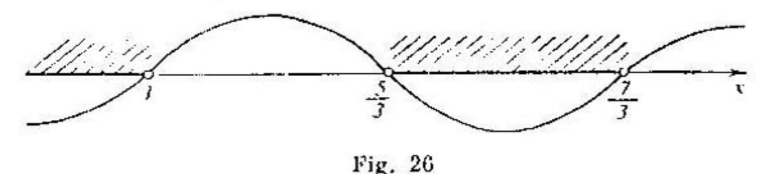


Fig. 26

EJEMPLO 3. Resolvamos la desigualdad

$$2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}. \tag{5}$$

SOLUCIÓN. Consecutivamente obtenemos:

$$2^{x+2}(1-2-2^2) > 5^{x+2}(5^{-1}-1),\quad 2^{x+2}(-5) > 5^{x+2}\left(-\frac{4}{5}\right),$$

$$\frac{2^{x+2}}{5^{x+2}} < \frac{4}{25} \quad \text{o bien} \quad \left(\frac{2}{5}\right)^{x+2} < \left(\frac{2}{5}\right)^2.$$

Como $0 < \frac{2}{5} < 1$, la última desigualdad es equivalente a $x + 2 > 2$, de donde obtenemos: $]0;\ +\infty[$ que es la solución de (5).

EJEMPLO 4. Resolvamos la desigualdad

$$\frac{1}{(0{,}5)^x - 1} - \frac{1}{1-(0{,}5)^{x+1}} \geqslant 0.$$

SOLUCIÓN. Hagamos $y = (0{,}5)^x$. Entonces, la desigualdad dada toma la forma

$$\frac{1}{y-1} - \frac{1}{1-0{,}5y} \geqslant 0,$$

de donde, después de transformaciones, hallamos:

$$\frac{y - \frac{4}{3}}{(y-1)(y-2)} \geqslant 0.$$

Con ayuda del método de intervalos (fig. 27) hallamos: $1 < y \leqslant \leqslant \frac{4}{3}$; $y > 2$.

Así, pues, el problema se ha reducido a resolver los siguientes conjuntos:

$$1 < (0,5)^x \leqslant \frac{4}{3};\ (0,5)^x > 2$$

o bien $(0,5)^0 < (0,5)^x \leqslant (0,5)^{\log_{0,5}\frac{4}{3}}$; $(0,5)^x > (0,5)^{-1}$.

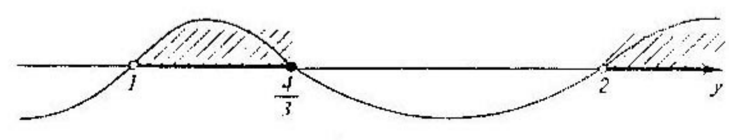


Fig. 27

Del último conjunto hallamos: $\left]-\infty; -1\right[\cup \left[\log_{0,5}\frac{4}{3}; 0\right[$ que es la solución de la desigualdad dada.

EJEMPLO 5. Resolvamos la desigualdad

$$8^x + 18^x - 2\cdot 27^x > 0. \tag{6}$$

SOLUCIÓN. Escribamos (6) de la forma siguiente:

$$(2^x)^3 + 2^x (3^x)^2 - 2 (3^x)^3 > 0$$

y, haciendo $u = 2^x$, $v = 3^x$, obtenemos una desigualdad homogénea de tercer grado:

$$u^3 + uv^2 - 2v^3 > 0. \tag{7}$$

Como $v = 3^x$, $v > 0$ y, por lo tanto, la división de ambos miembros de (7) por v^3 (convervando el signo de la desigualdad (7)) es una transformación equivalente. Habiendo ejecutado dicha transformación, obtenemos:

$$\left(\frac{u}{v}\right)^3 + \frac{u}{v} - 2 > 0.$$

Haciendo $z = \frac{u}{v}$, tendremos $z^3 + z - 2 > 0$ y, seguidamente, $(z-1)(z^2 + z + 2) > 0$, de donde $z > 1$.

De este modo, el problema se ha reducido a resolver la desigualdad

$$\frac{2^x}{3^x} > 1 \text{ ó bien } \left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^0.$$

Ya que $0 < \frac{2}{3} < 1$, de la última inecuación obtenemos: $]-\infty; 0[$ que es la solución de (6).

EJEMPLO 6. Resolvamos la desigualdad

$$(x^2 + x + 1)^x < 1. \tag{8}$$

SOLUCIÓN. Como el discriminante del trinomio de segundo grado $x^2 + x + 1$ es negativo y el coeficiente de x^2, positivo, $x^2 + x + 1 > 0$ con todos los valores reales de x. Por esta razón, el segundo miembro de (8) puede representarse como $(x^2 + x + 1)^0$ y escribir la desigualdad (8) de la forma siguiente:

$$(x^2 + x + 1)^x < (x^2 + x + 1)^0. \tag{9}$$

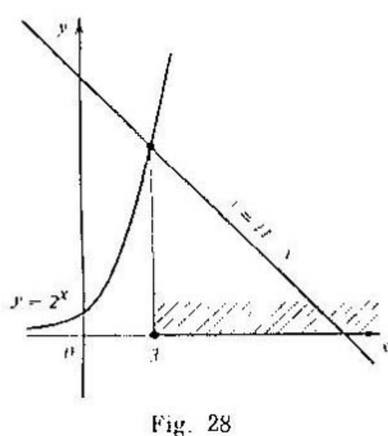


Fig. 28

A esta desigualdad no es posible aplicar ni el teorema 1 ni el 2, ya que sabiendo que $x^2 + x + 1 > 0$, no sabemos qué es mayor: $x^2 + x + 1$ ó bien 1. Si $x^2 + x + 1 > 1$, a la inecuación (9) es aplicable el teorema 1; si $x^2 + x + 1 < 1$, a (9) podemos aplicar el teorema 2. Así, pues, son posibles dos casos: $0 < x^2 + x + 1 < 1$ o bien $x^2 + x + 1 > 1$.

Esto significa, que la desigualdad (9) es equivalente al siguiente conjunto de sistemas de desigualdades:

$$\begin{cases} x^2+x+1<1 \\ x>0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2+x+1>1 \\ x<0 \end{cases}$$

$$\text{o bien} \begin{cases} x(x+1)<0 \\ x>0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x(x+1)>0 \\ x<0 \end{cases}$$

El primer sistema no tiene solución; del segundo, obtenemos: $]-\infty; -1[$ que es la solución de (8).

EJEMPLO 7. Resolvamos la desigualdad

$$2^x \geqslant 11 - x.$$

SOLUCIÓN. La función $y = 2^x$ crece, mientras que la función $y = 11 - x$ decrece por toda la recta numérica.

Está claro que $x = 3$ es la raíz de la ecuación $2^x = 11 - x$.

Entonces, $[3; +\infty[$ es la solución de la desigualdad dada (fig. 28).

EJERCICIOS

Resuelvan las siguientes inecuaciones:

999. $6^{3-x} < 216$. 1000. $(\log 3)^{3x-7} > (\log_3 10)^{7x+3}$.
1001. $2^x \cdot 5^x > 0{,}1\,(10^{x-1})^5$. 1002. $2^{x^2-6x-2,5} > 16\sqrt{2}$.
1003. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-|x+2|} \geqslant 81$. 1004. $(0{,}5)^{x-2} > 6$.
1005. $(0,(4))^{x^2-1} > (0{,}(6))^{x^2+6}$. 1006. $0{,}3^{2+4+6+\ldots+2x} > 0{,}3^{72}$.
1007. $\left(\frac{3}{5}\right)^{13x^2} \leqslant \left(\frac{3}{5}\right)^{x^4+36} < \left(\frac{25}{9}\right)^{-6x^2}$. 1008. $1 < 3^{|x^2-x|} < 9$.
1009. $0{,}02^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2^n}+\ldots} < \sqrt[3]{0{,}02^{3x^2+5x}} < 1$.
1010. $\sqrt{3^{x-54}} - 7\sqrt{3^{x-58}} \leqslant 162$. 1011. $8^{x+1} - 8^{2x-1} > 30$.
1012. $2^{2+x} - 2^{2-x} > 15$. 1013. $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2}{3}(x-2)} > 52$.
1014. $5^{2x+1} > 5^x + 4$. 1015. $\frac{1}{3^x+5} < \frac{1}{3^{x+1}-1}$.
1016. $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}}$. 1017. $36^x - 2 \cdot 18^x - 8 \cdot 9^x > 0$.
1018. $4^{2x+1} + 2^{2x+6} < 4 \cdot 8^{x+1}$. 1019. $4^{x+1,5} + 9^x < 9^{x+1}$.
1020. $2^{2x+2} + 6^x - 2 \cdot 3^{2x+2} > 0$.
1021. $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} - \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 1{,}25 > 0$.
1022. $2^{4x} - 2^{3x+1} - 2^{2x} - 2^{x+1} - 2 \leqslant 0$.
1023. $0{,}008^x + 5^{1-3x} + 0{,}04^{\frac{3}{2}(x+1)} < 30{,}04$.
1024. $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$. 1025. $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$.
1026. $|x-3|^{2x^2-7x} > 1$. 1027. $(4x^2+2x+1)^{x^2-x} > 1$.
1028. $\sqrt{2(5^x+24)} - \sqrt{5^x-7} \geqslant \sqrt{5^x+7}$.
1029. $\sqrt{13^x-5} \leqslant \sqrt{2(13^x+12)} - \sqrt{13^x+5}$.
1030. $\frac{6-3^{x+1}}{x} > \frac{10}{2x-1}$. 1031. $\frac{2^{x+1}-7}{x-1} < \frac{10}{3-2x}$.

§ 19. Desigualdades logarítmicas

La resolución de las desigualdades

$$\log_a f(x) > \log_a g(x), \qquad (1)$$

que llevan el nombre de *logarítmicas*, se basa en los siguientes teoremas.

TEOREMA 1. *Si $a > 1$, la desigualdad (1) es equivalente al sistema de desigualdades:*

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x). \end{cases} \qquad (2)$$

TEOREMA 2. *Si $0 < a < 1$, la desigualdad (1) es equivalente al sistema de desigualdades:*

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x). \end{cases} \quad (3)$$

OBSERVACIONES 1. Cuando $a > 1$ la desigualdad (1) y la última inecuación del sistema (2) son desigualdades del mismo sentido. En el caso de $0 < a < 1$ la desigualdad (1) y la última del sistema (3) son desigualdades de sentido contrario.

2. Las dos primeras desigualdades de los sistemas (2) y (3) prefijan el campo de definición de (1).

3. En el sistema (2) podemos omitir la primera desigualdad, ya que ella se desprende de la segunda y tercera. De modo análogo, en el sistema (3) es posible omitir la segunda desigualdad.

EJEMPLO 1 Resolvamos la desigualdad

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x^2-4x-6}{4x-11} \leqslant -1. \quad (4)$$

SOLUCIÓN. Como $-1 = \log_{\frac{1}{2}} 2$, la desigualdad (4) puede ser escrita así:

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x^2-4x-6}{4x-11} \leqslant \log_{\frac{1}{2}} 2. \quad (5)$$

Aquí, la base de los logaritmos $a = \frac{1}{2}$, es decir, $0 < a < 1$, y, por lo tanto, según el teorema 2 la desigualdad (5) es equivalente al siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2-4x-6}{4x-11} > 0 \\ \dfrac{2x^2-4x-6}{4x-11} \geqslant 2. \end{cases}$$

El sistema obtenido es equivalente a la desigualdad $\frac{2x^2-4x-6}{4x-11} \geqslant 2$, de la que hallamos: $[2;\ 2{,}75[\cup [4;\ +\infty[$ que es la solución de (4).

EJEMPLO 2. Resolvamos la desigualdad

$$\log_2 \frac{4}{x+3} > \log_2 (2-x).$$

SOLUCIÓN. Según el teorema 1 la desigualdad prefijada es equivalente al siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} \frac{4}{x+3} > 0 \\ 2-x > 0 \\ \frac{4}{x+3} > 2-x, \end{cases}$$

de donde obtenemos:

$$\begin{cases} -3 < x < 2 \\ \frac{(x+2)(x-1)}{x+3} > 0 \end{cases}$$

y, seguidamente, $]-3; -2[\cup]1; 2[$ que es la solución de la desigualdad dada.

EJEMPLO 3. Resolvamos la desigualdad

$$\log_{0,2}(x^3+8) - 0{,}5\log_{0,2}(x^2+4x+4) \leqslant \log_{0,2}(x+58). \qquad (6)$$

SOLUCIÓN. La desigualdad (6) es equivalente al siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} x^3+8 > 0 \\ x^2+4x+4 > 0 \\ x+58 > 0 \\ \log_{0,2}(x^3+8) - 0{,}5\log_{0,2}(x+2)^2 \leqslant \log_{0,2}(x+58). \end{cases}$$

A continuación, tenemos:

$$\begin{cases} x > -2 \\ x \neq -2 \\ x > -58 \\ \log_{0.2}(x^3+8) - \log_{0,2}\sqrt{(x+2)^2} \leqslant \log_{0,2}(x+58), \end{cases}$$

de donde $\begin{cases} x > -2 \\ \log_{0,2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{|x+2|} \leqslant \log_{0,2}(x+58). \end{cases}$

Como $x > -2$, $|x+2| = x+2$, obtenemos:

$$\begin{cases} x > -2 \\ \log_{0,2}(x^2-2x+4) \leqslant \log_{0,2}(x+58). \end{cases} \qquad (7)$$

Por fin, empleando el teorema 2 para la segunda desigualdad del sistema (7), llegamos al siguiente sistema:

$\begin{cases} x > -2 \\ x^2-2x+4 \geqslant x+58 \end{cases}$ y, a continuación, $\begin{cases} x > -2 \\ x^2-3x-54 \geqslant 0, \end{cases}$

de donde obtenemos: $]9; +\infty[$ que es la solución de (6).

EJEMPLO 4. Resolvamos la desigualdad

$$\log_{x-2}(2x-3) > \log_{x-2}(24-6x). \tag{8}$$

SOLUCIÓN. A esta desigualdad logarítmica no se puede aplicar ni el teorema 1 ni el 2, ya que con relación a la base $(x-2)$ del logaritmo no sabemos si es mayor o menor que 1. Si $x-2>1$, a la desigualdad (8) se puede aplicar el teorema 1; si $0<x-2<1$, (8) ha de resolverse con ayuda del teorema 2. Por ello, hay que considerar dos casos: 1) $x-2>1$; 2) $0<x-2<1$.

Así, pues, el problema se reduce a resolver el siguiente conjunto de sistemas de desigualdades

$$\begin{cases} x-2>1 \\ 2x-3>0 \\ 24-6x>0 \\ 2x-3>24-6x \end{cases} ; \qquad \begin{cases} 0<x-2<1 \\ 2x-3>0 \\ 24-6x>0 \\ 2x-3<24-6x. \end{cases}$$

Del primer sistema obtenemos $\frac{27}{8}<x<4$, del segundo: $2<x<3$. De modo que $]2; 3[\cup]\frac{27}{8}; 4[$ es la solución de (8).

EJEMPLO 5. Resolvamos la desigualdad

$$\log_{x+\frac{5}{2}}\left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2<0. \tag{9}$$

SOLUCIÓN. Escribamos la desigualdad (9) de la siguiente forma:

$$\log_{x+\frac{5}{2}}\left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2<\log_{x+\frac{5}{2}}1.$$

Razonando igual que en el ejemplo anterior, llegamos a la conclusión de que esta desigualdad es equivalente al conjunto de desigualdades:

$$\begin{cases} x+\frac{5}{2}>1 \\ \left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2>0; \\ \left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2<1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0<x+\frac{5}{2}<1 \\ \left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2>0 \\ \left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2>1, \end{cases}$$

$$\text{o bien } \begin{cases} x>-1{,}5 \\ x\neq 5;\ x\neq 1{,}5 \\ \dfrac{(x+2)\left(x-\frac{8}{3}\right)}{(2x-3)^2}>0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} -2{,}5<x<-1{,}5 \\ x\neq 5;\ x\neq 1{,}5 \\ \dfrac{(x+2)\left(x-\frac{8}{3}\right)}{(2x-3)^2}<0. \end{cases}$$

Después de resolver este conjunto, hallamos, simultáneamente, la solución de la desigualdad (9): $]-2; -1,5[\cup]\frac{8}{3}; 5[\cup]5; +\infty[$.

EJEMPLO 6. Resolvamos la desigualdad

$$\log_2^2 (x-1)^2 - \log_{0,5} (x-1) > 5. \qquad (10)$$

SOLUCIÓN. Como

$$\log_2 (x-1)^2 = 2 \log_2 |x-1| \text{ y } \log_{0,5} (x-1) =$$
$$= \frac{\log_2 (x-1)}{\log_2 0,5} = -\log_2 (x-1),$$

la inecuación (10) se puede escribir del siguiente modo:

$$4 \log_2^2 |x-1| + \log_2 (x-1) > 5. \qquad (11)$$

Hagamos $y = \log_2 (x-1)$. Como $x-1 > 0$ y, por lo tanto, $|x-1| = x-1$, la desigualdad (11) toma el aspecto: $4y^2 + y - 5 > 0$, de donde hallamos $y < -\frac{5}{4}$; $y > 1$.

Ahora el problema se reduce a resolver el conjunto de desigualdades logarítmicas:

$$\log_2 (x-1) < -\frac{5}{4}; \ \log_2 (x-1) > 1$$

$$\text{o bien } \log_2 (x-1) < \log_2 2^{-\frac{5}{4}}; \ \log_2 (x-1) > \log_2 2. \qquad (12)$$

De la primera desigualdad del conjunto (12) obtenemos $0 < x - 1 < 2^{-\frac{5}{4}}$ y, por consiguiente, $1 < x < 1 + \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}$.

De la segunda desigualdad del conjunto (12) obtenemos $x - 1 > 2$, es decir, $x > 3$. Así, pues, $]1; 1 + \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}[\cup]3; +\infty[$ es la solución de (10).

EJEMPLO 7. Resolvamos la desigualdad

$$x^{\log x} > 10. \qquad (13)$$

SOLUCIÓN. De modo convencional, esta desigualdad se puede denominar exponencial-logarítmica. Más arriba (véase la pág. 122), al estudiar las ecuaciones exponenciales-logarítmicas, indicamos que para su resolución se puede emplear el método de tomar el logaritmo de ambos miembros de la ecuación partiendo de una misma base. Este mismo método se emplea para resolver las desigualdades exponenciales-logarítmicas. Es evidente, que la transición de la desigualdad $f(x) > g(x)$ a la desigualdad $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ sólo es posible a condición de que $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ y $a > 1$, y la transi-

ción de la desigualdad $f(x) > g(x)$ a la desigualdad $\log_a f(x) < \log_a g(x)$, a condición de que $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ y $0 < a < 1$.

Retornemos a la desigualdad (13). Sus dos miembros sólo toman valores positivos. Tomemos de ambos miembros de (13) los logaritmos por la base 10. Obtenemos la desigualdad $\log x^{\log x} > \log 10$, equivalente a la desigualdad (13).

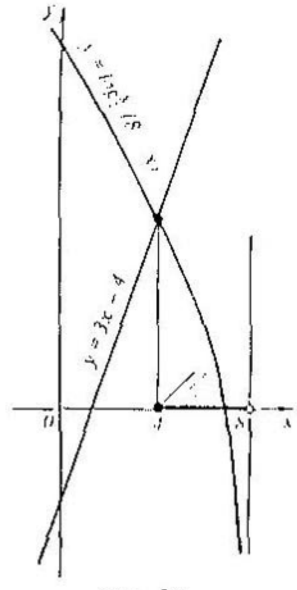


Fig. 29

Después de las transformaciones, obtenemos $\log x \cdot \log x > 1$, es decir, $\log^2 x > 1$, de donde $\log x < -1$; $\log x > 1$.

De la primera inecuación del conjunto obtenido, hallamos $0 < x < 0{,}1$, de la segunda, $x > 10$. Así, pues, $]0; 0{,}1[\ \cup\ ]10; \infty[$ es la solución de (13).

EJEMPLO 8. Resolvamos la desigualdad

$$(8-x)^{\log_2^2(8-x)} \leqslant 2^{3x-4}. \qquad (14)$$

SOLUCIÓN. De ambos miembros de (14) tomamos los logaritmos por la base 2. Obtenemos $\log_2 (8-x)^{\log_2^2(8-x)} \leqslant \log_2 2^{3x-4}$, equivalente a la desigualdad (14) y, a continuación, $\log_2^3 (8-x) \leqslant 3x-4$.

En el campo de definición de la desigualdad, es decir, con $x < 8$, la función $y = \log_2^3 (8-x)$ decrece, mientras que la función $y = 3x-4$, crece. Además, es fácil advertir que la ecuación $\log_2^3 (8-x) = 3x-4$ tiene la raíz $x = 4$. Por consiguiente, la desigualdad (14) tiene la solución: $[4; 8[$ (fig. 29).

EJERCICIOS

Resuelvan las siguientes desigualdades:

1032. $\log_3 \frac{3}{x-1} < \log_3 (5-x)$. 1033. $\log_{\frac{1}{4}} (2-x) > \log_{\frac{1}{4}} \frac{2}{x+1}$.

1034. $\log_{\frac{1}{2}} (5+4x-x^2) > -3$. 1035. $\log_{0,1} (x^2+75) - \log_{0,1} (x-4) \leqslant -2$.

1036. $\log_{\frac{1}{5}} (2x+5) < \log_{\frac{1}{5}} (16-x^2) - 1$.

1037. $\log_\pi (x+27) - \log_\pi (16-2x) < \log_\pi x$.

1038. $\frac{\log_{0,3} (x+1)}{\log_{0,3} 100 - \log_{0,3} 9} < 1$.

1039. $2 \log_8 (x-2) - \log_8 (x-3) > \frac{2}{3}$.

1040. $\frac{1}{2}+\log_9 x-\log_3 5x>\log_{\frac{1}{3}}(x+3)$. 1041. $\log^2_{0,2}(x-1)>4$.

1042. $\log_2((x-3)(x+2))+\log_{\frac{1}{2}}(x-3)<-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}3$.

1043. $\log_{\sqrt{2}}\frac{7-3x}{x+2}-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x+2)>\log_{\frac{1}{2}}4$.

1044. $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2-5x+8)}\leqslant 2,5$.

1045. $2,25^{\log_2(x^2-3x-10)}>\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2+4x+4)}$.

1046. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{9}}(x^2-3x+1)}<1$. 1047. $\log_x(x-1)\geqslant 2$.

1048. $\log_x\sqrt{21-4x}>1$. 1049. $\log_x\frac{x+3}{x-1}>1$.

1050. $\log_x(16-6x-x^2)\leqslant 1$. 1051. $\log_{x^2-3}729>3$.

1052. $\log_{\frac{x-1}{x+5}}0,3>0$. 1053. $\log_{|x-1|}0,5>0,5$.

1054. $2^{\log_8(x^2-6x+9)}\leqslant 3^{2\log_x\sqrt{x}-1}$

1055. $\log_5\sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5>1$. 1056. $\log_x(x^3+1)\cdot\log_{x+1}x>2$.

1057. $\log_x(x+1)<\log_{\frac{1}{x}}(2-x)$. 1058. $\log_{|x-4|}(2x^2-9x+4)>1$.

1059. $\log_{|x+6|}2\cdot\log_2(x^2-x-2)\geqslant 1$.

1060. $\log^2_{0,5}x+\log_{0,5}x-2\leqslant 0$. 1061. $\frac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\leqslant\frac{1}{2}$.

1062. $\log_2(x+1)^2+\log_2\sqrt{x^2+2x+1}>6$.

1063. $(\log_2 x)^4-\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^3}{8}\right)^2+9\log_2\frac{32}{x^2}<4\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2$.

1064. $\log_{\frac{1}{5}}x+\log_4 x>1$. 1065. $\log_x 5\sqrt{5}-1,25>(\log_x\sqrt{5})^2$

1066. $\log_{\sqrt{2}}(5^x-1)\cdot\log_{\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{5^x-1}>2$.

1067. $2^{\log_{0,4}x\cdot\log_{0,4}2,5x}>1$. 1068. $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}>2$.

1069. $0,2^{6-\frac{3}{\log_4 x}}>\sqrt[3]{0,008^{2\log_4 x-1}}$.

1070. $0,4^{\log_3\frac{3}{x}\cdot\log_3 3x}>6,25^{\log_3 x^2+2}$.

1071. $2^{\log^2_{0,5}x}+x^{\log_{0,5}x}>2,5$. 1072. $3^{\lg x+2}<3^{\lg x^2+5}-2$.

1073. $9^{\log_2(x-1)-1}-8\cdot 5^{\log_2(x-1)-2}>9^{\log_2(x-1)}-16\cdot 5^{\log_2(x-1)}$.

1074. $x^{\log_2 x}+16x^{-\log_2 x}<17$. 1075. $\log_3(4^x+1)+\log_{4^x+1}3>2{,}5$.

1076. $\log_3(3^x-1)\log_{\frac{1}{3}}(3^{x+2}-9)>-3$.

1077. $\log_2(\log_3(2-\log_4 x))<1$.

1078. $x+\log(1+2^x)>x\log 5+\log 6$

1079. $\log_2(9^x+3^{2x-1}-2^{x+\frac{1}{2}})<x+3{,}5$.

1080. $\log_{\frac{1}{2}}x+\sqrt{1-4\log^2_{\frac{1}{2}}x}<1$.

1081. $\sqrt{1-9\log^2_{\frac{1}{8}}x}>1-4\log_{\frac{1}{8}}x$.

1082. $\log_2(x-1)-\log_2(x+1)+\log_{\frac{x+1}{x-1}}2>0$.

1083. $\log_{\frac{x}{2}}8+\log_{\frac{x}{4}}8<\dfrac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2-4}$.

1084. $\log_x 2\cdot\log_{2x}2\cdot\log_2 4x>1$.

1085. $\log_2\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2)<1$. 1086. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-\frac{4}{5}\right)}\leqslant 1$.

1087. $0{,}3^{\log_{\frac{1}{3}}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}}>1$.

1088. $\log_3(\log_2(2-\log_4 x)-1)<1$.

1089. $\log_5\log_3\log_2(2^{2x}-3\cdot 2^x+10)>0$.

1090. $\log_2(1+\log_{\frac{1}{9}}x-\log_9 x)<1$. 1091. $\log_{\frac{1}{2}}\log_2\log_{x-1}9>0$.

1092. $\log_3\log_{x^2}\log_{x^2}x^4>0$. 1093. $\log_x\log_2(4^x-12)\leqslant 1$.

1094. $\dfrac{\log_5(x^2+3)}{4x^2-16x}<0$. 1095. $\dfrac{3x^2-16x+21}{\log_{0,3}(x^2+4)}<0$.

1096. $\dfrac{(x-0{,}5)(3-x)}{\log_2|x-1|}>0$. 1097. $\dfrac{\log_{0,3}|x-2|}{x^2-4x}<0$.

1098. $\dfrac{\log 7-\log(-8-x^2)}{\log(x+3)}>0$. 1099. $\dfrac{\log_2(\sqrt{4x+5}-1)}{\log_3(\sqrt{4x+5}+11)}>\dfrac{1}{2}$.

1100. $\dfrac{\log_{0,5}(\sqrt{x+3}-1)}{\log_{0,5}(\sqrt{x+3}+5)}<\dfrac{1}{2}$. 1101. $\dfrac{\log\sqrt{x+7}-\log 2}{\log 8-\log(x-5)}<-1$.

1102. $\dfrac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\log\sqrt[3]{x-40}}<3$. 1103. $\log_5(x+3)\geqslant\log_{x+3}625$.

1104. $\log_2 x\cdot\log_3 2x+\log_3 x\cdot\log_2 3x\geqslant 0$.

1105. $\log_{0,5}(x+2)\log_2(x+1)+\log_{x+1}(x+2)>0$.

1106. $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^x)\geqslant -2$. 1107. $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}(2^{x+2}-4^x)\geqslant -2$.

1108. $25^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} \leqslant 30.$ 1109. $(2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2\log_2 x - \log_2 (x+6)} > 1.$

1110. $\dfrac{1}{\log_{0,5} \sqrt{x+3}} \leqslant \dfrac{1}{\log_{0,5} (x+1)}.$

1111. $\dfrac{1}{\log_2 x} \leqslant \dfrac{1}{\log_2 \sqrt{x+2}}.$

1112. $\dfrac{\sqrt{\log_{0,5}^2 x - 81} + 2}{\log_{0,5} x - 1} < 1.$

1113. $|x-1|^{\log_2 (4-x)} > |x-1|^{\log_2 (1+x)}.$

1114. $\dfrac{x-1}{\log_3 (9-3^x) - 3} \leqslant 1.$ 1115. $\dfrac{2+\log_3 x}{x-1} < \dfrac{6}{2x-1}.$

1116. $\dfrac{6}{2x+1} > \dfrac{1+\log_2 (2+x)}{x}.$

Resuelvan los siguientes sistemas de desigualdades:

1117. $\begin{cases} \log_x (x+2) > 2 \\ (x^2 - 8x + 13)^{4x-6} < 1. \end{cases}$

1118. $\begin{cases} (x-1) \log 2 + \log (2^{x+1} + 1) < \log (7 \cdot 2^x + 12). \\ \log_x (x+2) > 2. \end{cases}$

§ 20. Ecuaciones y desigualdades con parámetros

Sea dada la ecuación

$$F(x, a) = 0. \qquad (1)$$

Si se plantea el problema de buscar tales pares $(x; a)$ quesatisfagan dicha ecuación, tendremos una ecuación con dos variables x y a. Pero puede plantearse otro problema. La cuestión es que si damos a la variable a cierto valor fijado, la (1) podría considerarse como una ecuación con una variable x, con la particularidad de que las soluciones de ella se determinarían, como es natural, con el valor elegido de a. Si se plantea el problema de resolver la ecuación (1) con relación a x para cada valor de a de cierto conjunto de números A, (1) recibe el nombre de ecuación con una variable x y un *parámetro* a, mientras que el conjunto A, campo de variación del parámetro. Acordemos entender por doquier en este apartado que la ecuación (1) no es como una ecuación con dos variables, sino como una ecuación con una variable x y con un parámetro a.

En esencia, la ecuación (1) es la anotación abreviada de una familia de ecuaciones que se obtienen de la ecuación (1) con diferentes y concretos valores numéricos del parámetro a. P. ej., sea dada la ecuación

$$2a(a-2)x = a-2 \qquad (2)$$

y sea el campo de variación del parámetro $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Entonces, la ecuación (2) es la anotación abreviada de la siguiente familia de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{lll} 6x = -3 & \text{con} & a = -1 \\ 0 \cdot x = -2 & \text{con} & a = 0 \\ -2x = -1 & \text{con} & a = 1 \\ 0 \cdot x = 0 & \text{con} & a = 2 \\ 6x = 1 & \text{con} & a = 3 \end{array}\right\}$$

En adelante, acordemos sobreentender por doquier como campo de variación del parámetro (si no se hacen restricciones especiales) el conjunto de todos los números reales, mientras que el problema de resolución de la ecuación con parámetro ha de enunciarse de la forma siguiente: resolver la ecuación (1) con parámetro significa resolver (sobre un conjunto de números reales) una familia de ecuaciones que se obtienen de la ecuación (1) con diversos valores reales del parámetro.

Como es imposible escribir por separado cada una de las ecuaciones de una familia infinita, por regla, se tiende a escoger ciertos valores «singulares» del parámetro (es cómodo denominarlos *de control*) en los cuales, o bien al pasar por los cuales, transcurre una variación cualitativa de la ecuación. Para aclarar cómo se hallan los valores de control del parámetro, consideremos varios ejemplos.

EJEMPLO 1. Resolvamos la ecuación

$$2a\,(a-2)\,x = a-2. \tag{3}$$

SOLUCIÓN. Aquí serán de control los valores del parámetro, con los que el coeficiente de x se reduce a cero, es decir, $a = 0$ y $a = 2$. Con estos valores del parámetro es imposible dividir ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de x, mientras que con los valores del parámetro $a \neq 0$ y $a \neq 2$, dicha división es posible. Así, pues, es ventajoso considerar la ecuación (3) con los siguientes valores del parámetro:

1) $a = 0$; 2) $a = 2$; 3) $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 2. \end{cases}$

1) Con $a = 0$ la ecuación (3) toma la forma $0 \cdot x = -2$. Ella no tiene raíces.

2) Con $a = 2$ la ecuación (3) toma la forma $0 \cdot x = 0$. La raíz de semejante ecuación puede ser cualquier número real.

3) Si $a \neq 0$ y $a \neq 2$, de la ecuación (3) obtenemos $x = \frac{a-2}{2a\,(a-2)}$, de donde determinamos que $x = \frac{1}{2a}$.

RESULTADO: 1) si $a = 0$, no hay raíces; 2) si $a = 2$, cualquier número real será raíz de la ecuación (3); 3) si $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 2, \end{cases}$ $x = \frac{1}{2a}$.

EJEMPLO 2. Resolvamos la ecuación

$$(a-1)\,x^2+2\,(2a+1)\,x+(4a+3)=0. \qquad (4)$$

SOLUCIÓN. En este caso $a=1$ es el valor de control. La cuestión radica en que con $a=1$ la ecuación (4) es lineal, mientras que con $a\neq 1$, ella es cuadrática (en esto consiste la variación cualitativa de la ecuación). Así, pues, al resolver (4) es conveniente estudiar los siguientes casos: 1) $a=1$; 2) $a\neq 1$.

1) Con $a=1$ la ecuación (4) toma la forma: $6x+7=0$, de donde $x=-\frac{7}{6}$.

2) En el caso $a\neq 1$ escojamos aquellos valores del parámetro con los que el discriminante de (4) se anula.

Se trata de que si el discriminante D se reduce a cero con cierto valor del parámetro $a=a_0$ y al pasar por este punto cambia de signo (p. ej., $D<0$ con $a<a_0$ y $D>0$ con $a>a_0$), al pasar por el punto $a=a_0$ varía el número de raíces reales de la ecuación cuadrática (en nuestro caso, con $a>a_0$ no hay raíces, con $a>a_0$ la ecuación tiene dos raíces). Así, pues, podemos hablar de cierto cambio cualitativo de la ecuación. Por esta razón, los valores del parámetro con los que $D=0$, por regla, también se refieren a los de control. Compongamos el discriminante D de la ecuación (4):

$$D=4\,(2a+1)^2-4\,(a-1)\,(4a+3),$$

de donde $D=4\,(5a+4)$.

Igualando el discriminante a cero, hallamos $a=-\frac{4}{5}$, o sea, el segundo valor de control del parámetro a. Si $a<-\frac{4}{5}$, entonces $D<0$, si $\begin{cases} a\geqslant -\frac{4}{5} \\ a\neq 1, \end{cases}$ $D\geqslant 0$.

De modo que nos queda por resolver la ecuación (4) en cada uno de los dos siguientes casos: $a<-\frac{4}{5}$; $\begin{cases} a\geqslant -\frac{4}{5} \\ a\neq 1. \end{cases}$

Si $a<-\frac{4}{5}$, la ecuación (4) no tiene soluciones reales: si $\begin{cases} a\geqslant -\frac{4}{5} \\ a\neq 1 \end{cases}$, hallamos: $x_{1,2}=\dfrac{-(2a+1)\pm\sqrt{5a+4}}{a-1}$.

RESULTADO: 1) si $a<-\frac{4}{5}$, no hay raíces; 2) si $a=1$, $x=-\frac{7}{6}$; 3) si $\begin{cases} a\geqslant -\frac{4}{5} \\ a\neq 1 \end{cases}$, $x_{1,2}=\dfrac{-(2a+1)\pm\sqrt{5a+4}}{a-1}$.

EJEMPLO 3. Resolvamos la ecuación

$$\frac{x^2+1}{a^2x-2a}-\frac{1}{2-ax}=\frac{x}{a}. \quad (5)$$

SOLUCIÓN El primer valor de control del parámetro es $a=0$. En tal caso, la ecuación (5) no tiene raíces. Examinemos el caso cuando $a\neq 0$. Después de las transformaciones (5) toma la forma:

$$(1-a)x^2+2x+a+1=0. \quad (6)$$

Igualando a cero el coeficiente de x^2, hallamos el segundo valor de control del parámetro: $a=1$. Con este valor de a, la ecuación (6) toma el aspecto: $2x+2=0$, de donde $x=-1$. Si $a\neq 0$ y $a\neq 1$, de la ecuación cuadrática (6) obtenemos: $x_1=-1$; $x_2=\frac{a+1}{a-1}$.

VERIFICACIÓN. Al pasar de la ecuación (5) a la (6) se produjo la ampliación del campo de definición de la ecuación y, por lo tanto, podrían aparecer raíces extrañas y, precisamente tales valores de x, con los que el denominador de una u otra de las fracciones de la ecuación (5), se reduce a cero. En nuestro ejemplo, semejante valor es sólo uno: $x=\frac{2}{a}$. Puede suceder que con cierto valor del parámetro a resulte que $x_1=\frac{2}{a}$. Entonces, con este valor de a, x_1 será la raíz extraña. Puede occurrir, asimismo, que con cierto valor de a, $x_2=\frac{2}{a}$. Entonces, con este valor de a, x_2 será la raíz extraña. Así, pues, aclaremos con qué valores del parámetro se realiza la igualdad $x_1=\frac{2}{a}$.

Haciendo $\frac{2}{a}=-1$ hallamos que $a=-2$. Esto quiere decir que si $a=-2$, $x_1=-1$ es una raíz extraña. En este caso $x_2=\frac{a+1}{a-1}=\frac{-2+1}{-2-1}=\frac{1}{3}$.

Ahora, determinemos con qué valores del parámetro $x_2=\frac{2}{a}$. Sea $\frac{a+1}{a-1}=\frac{2}{a}$. Entonces, $a^2-a+2=0$.

Esta última ecuación no tiene raíces reales. Esto quiere decir, que $x_2=\frac{a+1}{a-1}$ con ninguno de los valores del parámetro es raíz extraña.

Hemos hecho la verificación para los casos $a\neq 0$, $a\neq 1$. Más arriba ya hemos señalado que si $a=0$ la ecuación (5) no tiene raíces. Si $a=1$, la ecuación (5) tiene la raíz $x=-1$. Como con $a=1$ y $x=-1$ la igualdad $x=\frac{2}{a}$ no se realiza, la raíz $x=-1$, hallada en el caso cuando $a=1$, no es extraña.

RESULTADO: 1) si $a=0$ no hay raíces; 2) si $a=1$, $x=-1$; 3) si $a=-2$, $x=\frac{1}{3}$; 4) si $\begin{cases} a\neq 2 \\ a\neq 0, \\ a\neq 1 \end{cases}$ $x_1=-1$, $x_2=\frac{a+1}{a-1}$.

En la fig. 30 se aduce la ilustración gráfica del resultado obtenido.

EJEMPLO 4. Resolvamos la ecuación

$$\sqrt{x}+\sqrt{a}=\sqrt{1-(x+a)}. \tag{7}$$

SOLUCIÓN. Aquí, $a=0$ es el valor de control del parámetro (con $a<0$ el primer miembro de la ecuación no está definido, con $a\geqslant 0$, definido). Por esto, al resolver la ecuación (7) es ventajoso analizar los siguientes casos: 1) $a<0$; 2) $a\geqslant 0$.

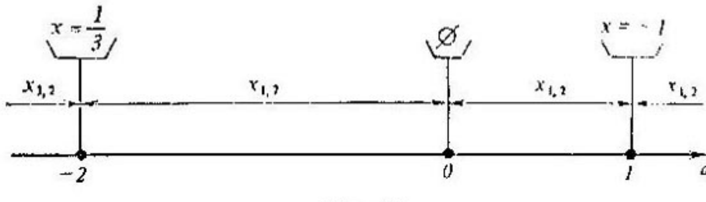


Fig. 30

1) Es evidente que con $a<0$ la ecuación (7) no tiene raíces.

2) Si $a\geqslant 0$, habiendo elevado al cuadrado ambos miembros de (7) y, después de las posteriores simplificaciones, llegamos a la ecuación

$$2\sqrt{ax}=1-2x-2a. \tag{8}$$

Aquí no advertimos ningún nuevo valor de control del parámetro. De nuevo elevamos al cuadrado los dos miembros de la ecuación y realizamos las posteriores simplificaciones, después de lo cual obtenemos la ecuación cuadrática

$$4x^2+4(a-1)x+4a^2-4a+1=0. \tag{9}$$

Escribamos el discriminante de la ecuación (9): $\frac{D}{4}=4(a-1)^2-4(4a^2-4a+1)$.

Igualándolo a cero, hallamos $a_1=0$, $a_2=\frac{2}{3}$ que son los valores de control del parámetro. Notemos que $D<0$ si $a>\frac{2}{3}$ (recordemos que consideramos el caso $a\geqslant 0$). Así, pues, es conveniente analizar los siguientes casos: $a>\frac{2}{3}$; $0\leqslant a\leqslant\frac{2}{3}$.

En el primer caso, la ecuación (9) no tiene soluciones, en el segundo, obtenemos

$$x_{1,2}=\frac{1-a\pm\sqrt{2a-3a^2}}{2}.$$

Ya hemos señalado más arriba que con $a<0$ la ecuación (7) no tiene raíces. De modo que al resolver (7) hemos llegado al siguiente resultado: si $a<0$; $a>\frac{2}{3}$, no hay raíces; si $0\leqslant a\leqslant\frac{2}{3}$, los siguientes valores pueden ser las raíces de la ecuación (7):

$$x_{1,2}=\frac{1-a\pm\sqrt{2a-3a^2}}{2}.$$

Esta mesurada enunciación está ligada con que al resolver la ecuación (7) se elevaron al cuadrado ambos miembros, lo que puede conducir a la aparición de raíces extrañas. Es decir, los valores de x_1 y x_2 hallados, han de ser comprobados.

La verificación de estos valores poniéndolos en la ecuación (7) es dificultosa, por lo que elegimos otro procedimiento. Señalemos que el campo de definición de la ecuación (7) se prefija con el sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} x\geqslant 0\\ 1-(x+a)\geqslant 0.\end{cases}$$

A continuación, de la ecuación (8) se desprende que ha de verificarse la desigualdad $1-2x\geqslant 0$. Así, pues, las raíces de la ecuación (7) deben satisfacer el sistema de desigualdades

$$\begin{matrix} x\geqslant 0\\ 1-(x+a)\geqslant 0\\ 1-2x-2a\geqslant 0\end{matrix} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x\geqslant 0\\ x+a\leqslant 1\\ x+a\leqslant\frac{1}{2}.\end{cases}$$

$$\text{de donde}\quad \begin{cases} x\geqslant 0\\ x+a\leqslant\frac{1}{2}.\end{cases} \qquad (10)$$

Comprobemos si los valores de x_1 satisfacen el sistema (10). Consideremos el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} \dfrac{1-a+\sqrt{2a-3a^2}}{2}\geqslant 0\\ \dfrac{1-a+\sqrt{2a-3a^2}}{2}+a\leqslant\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

La segunda desigualdad de este sistema es equivalente a $\sqrt{2a-3a^2} \leqslant -a$, que en el caso que estudiamos $\left(0 \leqslant a \leqslant -\frac{2}{3}\right)$, tiene una sola solución: $a=0$.

Como este valor satisface también la primera desigualdad del sistema, éste tiene una solución: $a=0$. Esto significa que $x_1 = \frac{1-a+\sqrt{2a-3a^2}}{2}$ con $a=0$ es la raíz de la ecuación (7) $\left(\text{con } a=0 \text{ tenemos } x_1=\frac{1}{2}\right)$, pero si $a \neq 0$, x_1 es una raíz extraña.

Comprobemos si el valor de x_2 satisface el sistema (10). Analicemos el sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} \dfrac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2} \geqslant 0 \\ \dfrac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2} + a \leqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Él es equivalente al siguiente sistema: $\begin{cases} \sqrt{2a-3a^2} \leqslant 1-a \\ \sqrt{2a-3a^2} \geqslant a \end{cases}$ y, más adelante,

$$\begin{cases} 4a^2-4a+1 \geqslant 0 \\ 4a^2-2a \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{ó bien} \quad \begin{cases} (2a-1)^2 \geqslant 0 \\ 4a\left(a-\frac{1}{2}\right) \leqslant 0, \end{cases}$$

de donde $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$. Así, pues, $x_2 = \frac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}$ es la raíz de la ecuación (7) si el parámetro a satisface el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant \frac{2}{3} \\ 0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}, \text{ es decir, } 0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

De este modo, la solución de la ecuación (7) se puede escribir de la forma siguiente: 1) si $a<0$; $a>\frac{1}{2}$, no hay raíces; 2) si $a=0$, $x_1 = \frac{1-a+\sqrt{2a-3a^2}}{2}$; $x_2 = \frac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}$; 3) si $0<a \leqslant \frac{1}{2}$, $x = \frac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}$.

Señalemos que si $a=0$, $x_1=x_2$. Esto permite que la anotación del resultado sea más breve.

RESULTADO. 1) si $a<0$; $a>\frac{1}{2}$, no hay raíces; 2) si $0\leqslant a\leqslant \frac{1}{2}$, $x=\frac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}$.

EJEMPLO 5. Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^3=2ax+ay \\ y^3=ax+2ay. \end{cases} \qquad (11)$$

SOLUCIÓN. Sustituyamos la primera ecuación del sistema (11) por la suma de las ecuaciones del sistema y la segunda ecuación, por su diferencia. Obtenemos un sistema equivalente al inicial:

$$\begin{cases} x^3+y^3=3a(x+y) \\ x^3-y^3=a(x-y), \end{cases}$$

o bien

$$\begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2-3a)=0 \\ (x-y)(x^2+xy+y^2-a)=0. \end{cases}$$

A su vez, el último sistema ese quivalente al siguiente conjunto de cuatro sistemas:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} & (12) \\ \begin{cases} x+y=0 \\ x^2+xy+y^2=a \end{cases} & (13) \\ \begin{cases} x^2-xy+y^2=3a \\ x-y=0 \end{cases} & (14) \\ \begin{cases} x^2-xy+y^2=3a \\ x^2+xy+y^2=a. \end{cases} & (15) \end{array}\right.$$

Del sistema (12) hallamos: $\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=0. \end{cases}$

Esta es la solución del sistema (11) con todo valor de $a \in R$.

Del sistema (13) obtenemos:

$$\begin{cases} y=-x \\ x^2=a. \end{cases} \qquad (16)$$

Aquí, $a=0$ es el valor de control del parámetro. Con $a<0$ el sistema no tiene soluciones reales, pero si $a\geqslant 0$, obtenemos:

$$\begin{cases} x_2=\sqrt{a} \\ y_2=-\sqrt{a} \end{cases}; \quad \begin{cases} x_3=-\sqrt{a} \\ y_3=\sqrt{a}. \end{cases}$$

Del sistema (14) hallamos: $\begin{cases} y=x \\ x^2=3a. \end{cases}$

Aquí, como en el caso anterior, $a=0$ es el valor de control del parámetro. Con $a<0$ el sistema no tiene soluciones reales, pero si $a \geqslant 0$, obtenemos:

$$\begin{cases} x_4=\sqrt{3a} \\ y_4=\sqrt{3a} \end{cases}; \quad \begin{cases} x_5=-\sqrt{3a} \\ y_5=-\sqrt{3a}. \end{cases}$$

El sistema (15) es simétrico. Haciendo $\begin{cases} x+y=u \\ xy=v, \end{cases}$ obtenemos

$$\begin{cases} u^2-3v=3a \\ u^2-u=a, \end{cases} \quad \text{de donde} \quad \begin{cases} u=0 \\ v=-a. \end{cases}$$

Así, pues, llegamos al siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x+y=0 \\ xy=-a, \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} y=-x \\ x^2=a. \end{cases}$$

Este sistema coincide con el sistema (16) que ya fue resuelto más arriba.

RESULTADO: 1) si $a \leqslant 0$, $(0;\,0)$; 2) si $a>0$, $(0;\,0)$, $(\sqrt{a};\,-\sqrt{a})$, $(-\sqrt{a};\,\sqrt{a})$; $(\sqrt{3a};\,\sqrt{3a})$, $(-\sqrt{3a};\,-\sqrt{3a})$.

EJEMPLO 6. Resolvamos la desigualdad

$$\frac{7x-11}{a+3} > (1+3a)\frac{x}{4}. \tag{17}$$

SOLUCIÓN. Haciendo $a+3=0$, hallamos $a=-3$ que es el primer valor de control del parámetro. Así, pues, hay que considerar los siguientes casos: 1) $a<-3$; 2) $a=-3$; 3) $a>-3$.

1) Consideremos el caso $a<-3$. Aquí, $a+3<0$ y la desigualdad (17) es equivalente a la inecuación: $4\ (7x-11)<(a+3)\times$ $\times\ (1+3a)\,x$, es decir, a la desigualdad:

$$(3a^2+10a-25)\,x > -44. \tag{18}$$

Suponiendo que $3a^2+10a-25=0$, hallamos el segundo valor de control del parámetro a: $a=\frac{5}{3}$; $a=-5$.

De esta forma, la solución de la desigualdad (18) ha de considerarse en los siguientes casos:

$$\begin{cases} a<-5;\ a>\frac{5}{3} \\ a<-3 \end{cases}; \quad \begin{cases} a=-5;\ a=\frac{5}{3} \\ a<-3 \end{cases}; \quad \begin{cases} -5<a<\frac{5}{3} \\ a<-3, \end{cases}$$

es decir, en los casos $a<-5$; $a=-5$; $-5<a<-3$.

En el primer caso $3a^2+10a-25>0$ y, de la inecuación (18), hallamos. $x>-\frac{44}{3a^2+10a-25}$.

En el segundo caso la desigualdad (18) toma la forma: $0\cdot x>-44$, lo que es válido con toda x. Por fin, si $-5<a<-3$, $3a^2+10a-25<0$, de (18) hallamos que $x<-\frac{44}{3a^2+10a-25}$.

2) Consideremos el caso $a=-3$. Entonces, la desigualdad (17) no tiene soluciones.

3) Analicemos el caso $a>-3$. En tal caso $a+3>0$ y (17) es equivalente a la desigualdad:

$$4(7x-11)>(a+3)(1+3a)x \quad \text{o bien} \quad (3a^2+10a-25)x<-44. \quad (19)$$

Lo mismo que para la desigualdad (18), los valores de control del parámetro a son aquí $a=\frac{5}{3}$ y $a=-5$. Como ahora consideramos el caso cuando $a>-3$, de los valores de control sólo debemos tener en cuenta uno: $a=\frac{5}{3}$. De este modo, al resolver la desigualdad (19) han de ser tomados en consideración los siguientes casos $a>\frac{5}{3}$; $a=\frac{5}{3}$; $-3<a<\frac{5}{3}$.

En el primer caso hallamos: $x<-\frac{44}{3a^2+10a-25}$, en el segundo, la desigualdad (19) no tiene soluciones, en el tercero, obtenemos: $x>-\frac{44}{3a^2+10a-25}$.

RESULTADO. 1) si $a=-3$; $a=\frac{5}{3}$, la desigualdad no tiene soluciones; 2) si $a<-5$; $-3<a<\frac{5}{3}$, $x>-\frac{44}{3a^2+10a-25}$; 3) si $-5<a<-3$, $a>\frac{5}{3}$, $x<-\frac{44}{3a^2+10a-25}$; 4) si $a=-5$, $-\infty<x<+\infty$.

EJEMPLO 7. Resolvamos la desigualdad

$$ax^2-2x+4>0. \quad (20)$$

SOLUCIÓN. Igualando a cero el coeficiente de x^2 y el discriminante del trinomio de segundo grado ax^2-2x+4, hallamos el primer valor de control del parámetro $a=0$ y el segundo valor de control $a=\frac{1}{4}$ $\left(\text{con ello, si } a>\frac{1}{4},\ D<0;\ \text{si } a\leqslant\frac{1}{4},\ D\geqslant 0\right)$. Resol-

vamos la desigualdad (20) en cada uno de los siguientes cuatro casos:

1) $a > \frac{1}{4}$; 2) $0 < a \leqslant \frac{1}{4}$; 3) $a = 0$; 4) $a < 0$.

1) Si $a > \frac{1}{4}$, el trinomio $ax^2 - 2x + 4$ tiene discriminante negativo y coeficiente superior positivo. Esto significa, que el trinomio es positivo con toda x, o sea, en este caso, la solución de la desigualdad (20) es el conjunto de todos los números reales.

2) Si $0 < a \leqslant \frac{1}{4}$, el trinomio $ax^2 - 2x + 4$ tiene las siguientas raíces: $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{a}$, con la particularidad de que

$$\frac{1-\sqrt{1-4a}}{a} \leqslant \frac{1+\sqrt{1-4a}}{a}.$$

Así, pues, la solución de la desigualdad (20) es el siguiente conjunto:

$$x < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}; \quad x > \frac{1+\sqrt{1-4a}}{a}.$$

3) Si $a = 0$, la desigualdad (20) toma la forma: $-2x + 4 > 0$, de donde se obtiene $x < 2$.

4) Si $a < 0$, tendremos $\frac{1+\sqrt{1-4a}}{a} < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$.

De modo que en este caso la solución de (20) es el siguiente sistema:

$$\frac{1+\sqrt{1-4a}}{a} < x < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}.$$

RESULTADO: 1) si $a > \frac{1}{4}$, $-\infty < x < +\infty$; 2) si $0 < a \leqslant \frac{1}{4}$, $x < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$; $x > \frac{1+\sqrt{1-4a}}{a}$; 3) si $a = 0$, $x < 2$; 4) si $a < 0$, $\frac{1+\sqrt{1-4a}}{a} < x < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$.

EJEMPLO 8. Resolvamos la desigualdad

$$\frac{x^2+1}{a^2x-2a} - \frac{1}{2-ax} > \frac{x}{a}. \tag{21}$$

SOLUCIÓN. Transformemos la desigualdad (21) a la forma

$$\frac{x^2+1}{a(ax-2)} + \frac{1}{ax-2} - \frac{x}{a} > 0$$

y, a continuación,

$$\frac{(1-a)x^2+2x+1+a}{a^2\left(x-\frac{2}{a}\right)}>0. \tag{22}$$

La desigualdad (22) es equivalente a la (21). El valor $a=0$ es el primer valor de control del parámetro. Igualando a cero el coeficiente de x^2 en el numerador, hallamos el segundo valor de control del parámetro: $a=1$. Por fin, el discriminante del trinomio de segundo grado $(1-a)\,x^2+2x+1+a$ es igual a a^2. Él se reduce a cero con el valor de control $a=0$ que ya hallamos.

De modo que es conveniente considerar los siguientes casos: 1) $a=1$; 2) $a=0$; 3) $\begin{cases} a\neq 0 \\ a\neq 1. \end{cases}$

Resolvamos la desigualdad (22) en cada uno de estos casos:

1) Con $a=1$ (22) toma la forma: $\frac{2x+2}{x-2}>0$, de donde hallamos: $x<-1$, $x>2$.

2) Con $a=0$ (22) no tiene soluciones.

3) Si $\begin{cases} a\neq 0, \\ a\neq 1 \end{cases}$ después de realizar en el numerador del primer miembro de la desigualdad (22) la descomposición en factores, obtenemos la desigualdad

$$\frac{(1-a)(x+1)\left(x-\frac{a+1}{a-1}\right)}{x-\frac{2}{a}}>0 \tag{23}$$

equivalente a (22), y, por lo tanto, a (21).

A su vez, la desigualdad (23) debe analizarse en dos casos: $\begin{cases} a\neq 0 \\ a<1 \end{cases}$ y $a>1$.

En el primero, $1-a>0$ y (23) toma el aspecto:

$$\frac{(x+1)\left(x-\frac{a+1}{a-1}\right)}{x-\frac{2}{a}}>0, \tag{24}$$

en el segundo caso, $1-a<0$ y (23) toma la forma:

$$\frac{(x+1)\left(x-\frac{a+1}{a-1}\right)}{x-\frac{2}{a}}<0. \tag{25}$$

Para resolver las desigualdades (24) y (25) con el método de intervalos, hay que disponer en la recta numérica los puntos -1, $\frac{a+1}{a-1}$, $\frac{2}{a}$ en orden de crecimiento. Con este fin, compongamos las siguientes diferencias:

$$A_1=\frac{a+1}{a-1}-(-1),\quad A_2=\frac{2}{a}-(-1),\quad A_3=\frac{a+1}{a-1}-\frac{2}{a}$$

y aclaremos qúe signo habrá en cada uno de los casos obtenidos.

Consideremos la diferencia $A_1=\frac{2a}{a-1}$.

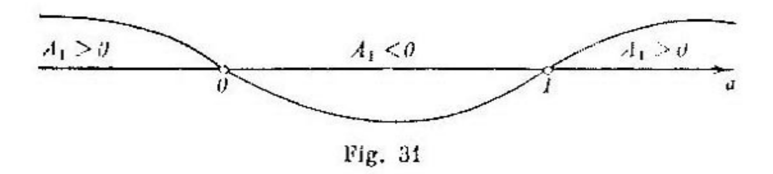


Fig. 31

Hallamos (fig. 31) que si $a<0$, $A_1>0$; si $0<a<1$, $A_1<0$; si $a>1$, $A_1>0$.

Analizando la diferencia $A_2=\frac{2+a}{a}$, obtenemos (fig. 32) que si $a<-2$, $A_2>0$; si $-2<a<0$, $A_2<0$; si $0<a<1$; $a>1$, $A_2>0$ y, por fin, si $a=-2$, $A_2=0$.

Examinemos ahora la diferencia

$$A_3=\frac{a^2-a+2}{a(a-1)}.$$

Como el discriminante del trinomio de segundo grado a^2-a+2 es negativo, en tanto que el coeficiente de a^2, positivo, $a^2-a+2>$

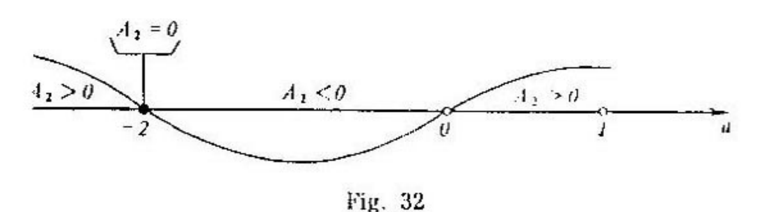


Fig. 32

>0 con todo valor de a y el signo de diferencia A_3 sólo depende del signo del denominador $a(a-1)$. Obtenemos (fig. 33) que si $a<0$, $A_3>0$; si $0<a<1$, $A_3<0$; si $a>1$, $A_3>0$.

Ilustremos ahora los resultados de la investigación de los signos de las diferencias A_1, A_2, A_3 (fig. 34). La desigualdad (24) se resuelve a condición de que $0 \neq a < 1$ (en la fig. 34 estos valores de a

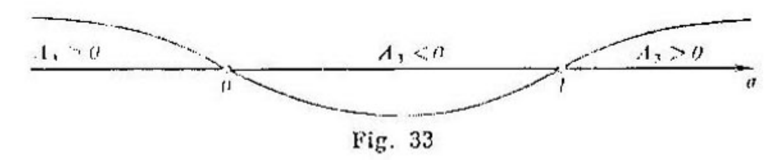


Fig. 33

están sombreados), por lo que hay que analizar dicha desigualdad en cada uno de los siguientes casos: $a < -2$; $-2 < a < 0$; $0 < a < 1$; $a = -2$.

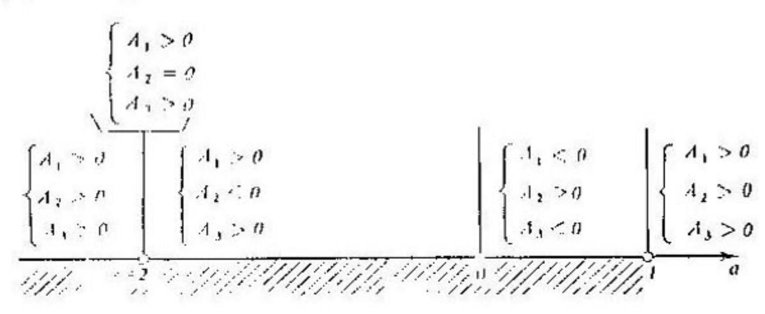


Fig. 34

En los primeros tres casos obtenemos, respectivamente:

$$-1 < \frac{2}{a} < \frac{a+1}{a-1}; \quad \frac{2}{a} < -1 < \frac{a+1}{a-1}; \quad \frac{a+1}{a-1} < -1 < \frac{2}{a}.$$

Habiendo resuelto la desigualdad (24) con el método de intervalos (fig. 35, a, b, c), hallamos:

$$\text{si } a < -2, \quad -1 < x < \frac{2}{a}; \quad x > \frac{a+1}{a-1};$$

$$\text{si } -2 < a < 0, \quad \frac{2}{a} < x < -1; \quad x > \frac{a+1}{a-1};$$

$$\text{si } 0 < a < 1, \quad \frac{a+1}{a-1} < x < -1; \quad x > \frac{2}{a}.$$

Por fin con $a = -2$ la desigualdad (24) toma la forma

$$\frac{(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{x+1} > 0,$$

de donde hallamos $x > -\frac{1}{3}$.

Al resolver la desigualdad (25) nos interesarán los signos de las diferencias A_1, A_2, A_3 sólo en el intervalo $a > 1$ (en la fig. 34 éste no está sombreado). Así, pues, con $a > 1$, tenemos:

$$-1 < \frac{2}{a} < \frac{a+1}{a-1}.$$

Con ayuda del método de intervalos hallamos la solución de (25): si $a > 1$, $x < -1$; $\frac{2}{a} < x < \frac{a+1}{a-1}$.

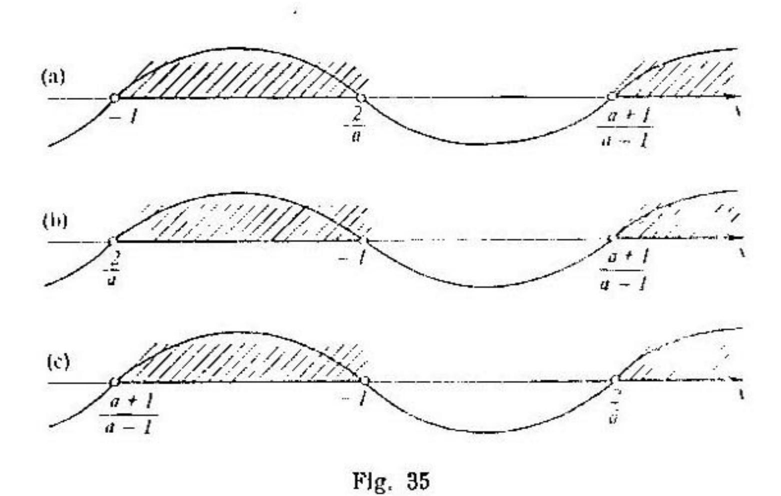


Fig. 35

Escribamos ahora el resultado definitivo para la desigualdad (21):

1) si $a < -2$, $-1 < x < \frac{2}{a}$; $x > \frac{a+1}{a-1}$;

2) si $a = -2$, $x > -\frac{1}{3}$;

3) si $-2 < a < 0$, $\frac{2}{a} < x < -1$; $x > \frac{a+1}{a-1}$;

4) si $a = 0$, la desigualdad no tiene soluciones;

5) si $0 < a < 1$, $\frac{a+1}{a-1} < x < -1$; $x > \frac{2}{a}$;

6) si $a = 1$, $x < -1$; $x > 2$;

7) si $a > 1$, $x < -1$; $\frac{2}{a} < x < \frac{a+1}{a-1}$.

EJEMPLO 9. Hallemos todos los valores del parámetro a con los que el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} -4x+ay=1+a \\ (6+a)\,x+2y=3+a \end{array}\right. \tag{26}$$

no tiene soluciones.

SOLUCIÓN. El sistema dado no es compatible cuando, y sólo cuando,

$$\frac{-4}{6+a}=\frac{a}{2}\neq\frac{1+a}{3+a}. \tag{27}$$

De la ecuación $\frac{-4}{6+a}=\frac{a}{2}$, hallamos: $a_1=-2$; $a_2=-4$.

De la ecuación $\frac{a}{2}=\frac{1+a}{3+a}$, hallamos: $a_3=1$; $a_4=-2$.

Es decir, la condición $\frac{a}{2}\neq\frac{1+a}{3+a}$ se verifica si $a\neq 1$; $a\neq -2$.

Del sistema $\left\{\begin{array}{l} a=-2;\ a=-4 \\ a\neq 1 \\ a\neq -2 \end{array}\right.$ hallamos que la condición (27) es equivalente a la igualdad $a=-4$. Así, pues, con $a=-4$ el sistema (26) no tiene soluciones.

EJEMPLO 10. Hallemos todos los valores del parámetro a con los que la desigualdad $(x-2+3a)(x-2a+3)<0$ se verifica para toda x de $[2;\ 3]$.

SOLUCIÓN. La desigualdad dada tiene la forma $(x-x_1)\times\times(x-x_2)<0$, donde $x_1=2-3a$, $x_2=2a-3$. Después de resolverla obtenemos $x_1<x<x_2$ (si $x_1<x_2$) o bien $x_2<x<x_1$ (si $x_2<x_1$); si $x_1=x_2$, no hay solución.

(a) $2a-3$ $2-3a$ x

(b) $2-3a$ $2a-3$ x

Fig. 36

Así, pues, como solución de la desigualdad inicial nos sirve el intervalo $]2a-3;\ 2-3a[$ o bien $]2-3a;\ 2a-3[$ (fig. 36, a, b).

Del planteamiento del problema se desprende que todos los puntos del segmento $[2;\ 3]$ deben satisfacer la desigualdad prefijada, pero esto se verificará cuando, y sólo cuando, los puntos con coordenadas 2 y 3 yacen dentro del intervalo $]x_1;\ x_2[$ ó $]x_2;\ x_1[$, es decir,

cuando $2a-3<2<3<2-3a$ o bien cuando $2-3a<2<$ $<3<2a-3$.

Del sistema de desigualdades $2a-3<2<3<2-3a$ obtenemos el sistema $\begin{cases} 2a-3<2 \\ 2-3a>3, \end{cases}$ de donde hallamos que $a<-\frac{1}{3}$.

El sistema de desigualdades $2-3a<2<3<2a-3$ es equivalente al sistema $\begin{cases} 2-3a<2 \\ 2a-3>3, \end{cases}$, de donde hallamos que $a>3$. Así, pues, la desigualdad inicial se verifica con toda $x\in[2;\ 3]$ con $a<-\frac{1}{3}$ o bien $a>3$.

EJEMPLO 11. Hallemos todos los valores del parámetro a con los que la ecuación

$$x^2+4x-2\,|\,x-a\,|+2-a=0 \qquad (28)$$

tiene dos raíces.

SOLUCIÓN. La ecuación dada es equivalente al conjunto de dos sistemas mixtos

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-a\geqslant 0 \\ x^2+4x-2(x-a)+2-a=0 \end{cases} \qquad (29) \\ \begin{cases} x-a\leqslant 0 \\ x^2+4x+2(x-a)+2-a=0. \end{cases} \qquad (30) \end{array}\right.$$

Resolvamos el sistema (29). Tenemos $\begin{cases} x\geqslant a \\ x^2+2x+a+2=0. \end{cases}$

El discriminante D de la ecuación $x^2+2x+a+2=0$ es igual a $(-a-1)$. Si $D<0$, es decir, $a>-1$, la ecuación x^2+ $+2x+a+2=0$ no tiene raíces. Si $D=0$, o sea, $a=-1$, dicha ecuación tiene una sola raíz $x=-1$; si $D>0$, es decir, $a<-1$, la ecuación tiene dos raíces: $x_1=-1-\sqrt{-a-1}$, $x_2=-1+$ $+\sqrt{-a-1}$.

Las raíces halladas deben satisfacer la desigualdad $x\geqslant a$; sólo en tal caso se pueden considerar como soluciones del sistema (29). Es preciso considerar dos casos: 1) $a=-1$; 2) $a<-1$ (con $a>-1$ la ecuación del sistema (29), como dijimos más arriba, no tiene raíces, de modo que (29) no tiene soluciones).

1) Si $a=-1$, $x=-1$. En este caso, la desigualdad $x\geqslant a$ se verifica, o sea, $x=-1$ es la solución de (29).

2) Si $a<-1$, $x_1=-1-\sqrt{-a-1}$, $x_2=-1+\sqrt{-a-1}$.

Aclaremos con qué valores de a se verifica la desigualdad $x_1\geqslant a$ y con qué valores de a, la desigualdad $x_2\geqslant a$. Dirijámonos, primero, a la desigualdad $x_1\geqslant a$.

Tenemos sucesivamente:

$$-1-\sqrt{-a-1}\geqslant a,$$

$$\sqrt{-a-1}\leqslant -a-1. \qquad (31)$$

Habiendo dividido ambos miembros de la desigualdad (31) por la expresión $\sqrt{-a-1}$, que con $a<-1$ sólo toma valores positivos, obtenemos la inecuación $1\leqslant\sqrt{-a-1}$, equivalente a (31).

Seguidamente tenemos: $1\leqslant -a-1$, de donde $a\leqslant -2$.

Examinemos ahora $x_2\geqslant a$. Obtenemos:

$$-1+\sqrt{-a-1}\geqslant a,\ \sqrt{-a-1}\geqslant a+1.$$

Como con $a<-1$ el primer miembro de esta desigualdad es positivo y el segundo negativo, la desigualdad es válida con toda $a<-1$.

Definitivamente obtenemos la siguiente solución del sistema (29): si $a>-1$, no hay soluciones; si $a=-1$, $x=-1$; si $-2<a<-1$, $x=-1+\sqrt{-a-1}$; si $a\leqslant -2$, $x_1=-1-\sqrt{-a-1}$, $x_2=-1+\sqrt{-a-1}$.

Resolvamos el sistema (30). Tenemos $\begin{cases} x\leqslant a \\ x^2+6x+2-3a=0.\end{cases}$

De la ecuación $x^2+6x+2-3a=0$, hallamos:

$$x_{3,4}=-3\pm\sqrt{7+3a}.$$

Si $a<-\frac{7}{3}$, no hay raíces reales, es decir, el sistema (30) tampoco tiene solución; si $a=-\frac{7}{3}$, $x=-3$; si $a>-\frac{7}{3}$, $x_3=-3-\sqrt{7+3a}$, $x_4=-3+\sqrt{7+3a}$.

De las raíces halladas elegimos aquellas que satisfacen la desigualdad $x\leqslant a$. Si $a=-\frac{7}{3}$, $x=-3$ y la desigualdad $x\leqslant a$ se verifica. O sea, $x=-3$ es la solución del sistema (30).

Sea $a>-\frac{7}{3}$. Aclaremos con qué valores de a se verifica la desigualdad $x_3\leqslant a$. Tenemos:

$$-3-\sqrt{7+3a}\leqslant a,$$

$$\sqrt{7+3a}\geqslant -a-3. \qquad (32)$$

Como con $a>-\frac{7}{3}$, el primer miembro de (32) es positivo y el segundo negativo, la desigualdad (32) es cierta.

De este modo, x_3 es la solución del sistema (30) con toda $a>-\frac{7}{3}$.

Ahora, examinemos la desigualdad $x_4 \leqslant a$. Tenemos:

$$-3+\sqrt{7+3a}\leqslant a,$$
$$\sqrt{7+3a}\leqslant a+3. \qquad (33)$$

Como con $a>-\frac{7}{3}$ los dos miembros de la desigualdad (33) son positivos, elevándolos al cuadrado, obtenemos la desigualdad equivalente $7+3a\leqslant(a+3)^2$. A continuación, tenemos: $(a+1)\times\times(a+2)\geqslant 0$, de donde hallamos que $a\leqslant -2$ o bien $a\geqslant -1$. Así, pues, x_4 es la solución del sistema (30) si $-\frac{7}{3}< a\leqslant -2$ o bien $a\geqslant -1$.

Definitivamente obtenemos las siguientes soluciones del sistema (30):

si $a<-\frac{7}{3}$, no hay soluciones; si $a=-\frac{7}{3}$, $x=-3$;

si $-\frac{7}{3}<a\leqslant -2$, $x_{3,4}=-3\pm\sqrt{7+3a}$;

si $-2<a<-1$, $x=x_3=-3-\sqrt{7+3a}$;

si $a\geqslant -1$, $x_{3,4}=-3\pm\sqrt{7+3a}$.

Hemos hallado las soluciones de los sistemas (29) y (30). La solución de la ecuación (29) es la unión de las soluciones de los sistemas (29) y (30) halladas.

De los razonamientos aducidos con anterioridad es evidente que dicha unión debe realizarse por separado con los siguientes valores del parámetro:

1) $a>-1$; 2) $a=-1$; 3) $-2<a<-1$; 4) $a=-2$; 5) $-\frac{7}{3}<a<-2$; 6) $a=-\frac{7}{3}$; 7) $a<-\frac{7}{3}$.

1) Si $a>-1$, la ecuación tiene dos raíces: x_3, x_4, es decir, $-3\pm\sqrt{7+3a}$.

2) Si $a=-1$, la ecuación tiene dos raíces: -1, -5.

3) Si $-2<a<-1$, la ecuación tiene dos raíces:

$$x_2,\ x_3,\ \text{es decir},\ -1+\sqrt{-a-1}\ \text{y}\ -3-\sqrt{7+3a}.$$

4) Si $a=-2$, la ecuación tiene tres raíces: -2, 0, -4.

5) Si $-\frac{7}{3}<a<-2$, la ecuación tiene cuatro raíces: $-1\pm\pm\sqrt{-a-1}$; $-3\pm\sqrt{7+3a}$.

6) Si $a=-\frac{7}{3}$, la ecuación tiene tres raíces: -3; $-1\pm\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$.

7) Si $a < -\frac{7}{3}$, la ecuación tiene dos raíces: $x_1 = -1 + \sqrt{-a-1}$; $x_2 = -1 - \sqrt{-a-1}$.

Así, pues, la ecuación (28) tiene, exactamente, dos raíces con $a > -2$ o bien con $a < -\frac{7}{3}$.

EJEMPLO 12. Hallemos todos los valores de a, con los que la ecuación

$$2 \log (x+3) = \log ax \tag{34}$$

tiene una sola raíz.

SOLUCIÓN. Transformemos la ecuación a la forma $\log (x+3)^2 = \log ax$. A continuación, obtenemos $(x+3)^2 = ax$, de donde

$$x^2 - (a-6)\, x + 9 = 0. \tag{35}$$

La ecuación (34) tiene una sola raíz en los siguientes casos: 1) la ecuación (35) tiene una sola raíz y ésta satisface la ecuación (34); 2) la ecuación (35) tiene dos raíces, pero una de ellas es extraña para la ecuación (34).

Consideremos el primer caso. La ecuación (35) tiene una raíz si su discriminante D es nulo. Tenemos $D = (a-6)^2 - 36 = a^2 - 12a$.

$D = 0$ con $a = 0$ o bien con $a = 12$. El caso cuando $a = 0$ no se considera, ya que con $a = 0$ el segundo miembro de (34) es indeterminado. Si $a = 12$, de la ecuación (35) hallamos $x = 3$, única raíz de la ecuación (35) y, como muestra la verificación, que satisface también la ecuación (34).

Examinemos el segundo caso cuando $D > 0$. Aquí, (35) tiene dos raíces: $x_{1,2} = \frac{a-6 \pm \sqrt{a^2-12a}}{2}$.

Con el fin de que las raíces halladas lo sean de la ecuación (34), es necesario y suficiente que ellas satisfagan la desigualdad $x+3 > 0$. Así, pues, de las raíces halladas de la ecuación (35) una será la raíz de la ecuación (34), mientras que la otra no será raíz de esta ecuación cuando, y sólo cuando,

$$\begin{cases} x_1 > -3 \\ x_2 \leqslant -3 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x_2 > -3 \\ x_1 \leqslant -3, \end{cases}$$

donde $x_1 = \frac{a-6+\sqrt{a^2-12a}}{2}$, $x_2 = \frac{a-6-\sqrt{a^2-12a}}{2}$.

De este modo, el problema se reduce a la solución del conjunto de dos sistemas de desigualdades

$$\begin{cases} \frac{a-6+\sqrt{a^2-12}}{2} > -3 \\ \frac{a-6-\sqrt{a^2-12}}{2} \leqslant -3 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{a-6-\sqrt{a^2-12}}{2} > -3 \\ \frac{a-6+\sqrt{a^2-12}}{2} \leqslant -3. \end{cases}$$

Resolvamos el primer sistema. Tenemos:

$$\begin{cases} \sqrt{a^2-12a} > -a \\ \sqrt{a^2-12a} \geqslant a, \end{cases}$$

de donde $a^2 - 12a > a^2$, es decir, $a < 0$.

Resolvamos el segundo sistema. Tenemos:

$$\begin{cases} \sqrt{a^2-12a} < a \\ \sqrt{a^2-12a} \leqslant -a. \end{cases}$$

Este sistema no tiene soluciones, ya que bien $a < 0$, o bien $-a < 0$, es decir, o la primera desigualdad, o bien la segunda del último sistema no tiene soluciones. Así, pues, el segundo caso se verifica con $a < 0$.

En definitiva, obtenemos que la ecuación (34) tiene la única solución si $a = 12$ o bien si $a < 0$.

EJERCICIOS

Resuelvan las siguientes ecuaciones:

1119. $(a^2-2a+1)\,x = a^2+2a-3$.

1120. $(a^3-a^2-4a+4)\,x = a-1$.

1121. $\frac{x}{a}+\frac{a}{3}+\frac{x+a}{a+3}=1$. 1122. $\frac{x+a}{1+a}=\frac{x-a}{2+a}$.

1123. $\frac{3x-2}{a^2-2a}+\frac{x-1}{a-2}+\frac{2}{a}=0$. 1124. $x^2-4ax+3a^2=0$.

1125. $ax^2-(1-2a)\,x+a-2=0$.

1126. $(2a-1)\,x^2-(3a+1)\,x+a-1=0$.

1127. $(a^2+a-2)\,x^2+(2a^2+a+3)\,x+a^2-1=0$.

1128. $\frac{3x^2-2}{a^2+3a}+\frac{x-1}{a+3}+\frac{2}{a}=0$.

1129. $\frac{x^2}{x-2a}+\frac{2ax-(a-1)(a+2)}{2a-x}+1=0$.

1130. $\frac{2x}{2x+a}+\frac{x}{2x-a}=\frac{a^2}{4x^2-a^2}$.

1131. $\frac{2x-1}{x-a}+\frac{2x}{a}=\frac{ax-2}{a^2-ax}$.

1132. $\frac{x-a}{x-1}+\frac{x+a}{x+1}=\frac{x-2a}{x-2}+\frac{x+2a}{x+2}-\frac{6(a-1)}{5}$.

1133. $x\sqrt{3}+ax+\sqrt{x}=0$. 1134. $\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}$.

1135. $x+\sqrt{x^2-x}=a$. 1136. $\sqrt{x-2a}-\sqrt{x-a}=2$.

1137. $\sqrt{x^2+3a^2}-\sqrt{x^2-3a^2}=x\sqrt{2}$.

1138. $2\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{a-x+\sqrt{x(a+x)}}$.

1139. $\frac{\sqrt{a+x}}{a}+\frac{\sqrt{a+x}}{x}=\sqrt{x}$.

1140. $\frac{1}{\sqrt{x+a}}+\frac{1}{\sqrt{x-a}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

1141. $(4a-15)x^2+2a|x|+4=0$.

1142. $\log_9 x+\log_9 \frac{2-x}{2}=\log_9 \log_3 a$.

1143. $144^{|x|}-2\cdot 12^{|x|}+a=0$.

1144. $3\cdot 4^{x-2}+27=a+a\cdot 4^{x-2}$.

1145. $1-\log a=\frac{1}{3}\left(\log \frac{1}{2}+\log x+\frac{1}{3}\log a\right)$.

1146. $\log 2x+\log(2-x)=\log\log a$.

1147. $\log_a x+\log_{\sqrt{a}} x+\log_{\sqrt[3]{a^2}} x=27$.

1148. $\log_a \sqrt{4+x}+3\log_{a^2}(4-x)-\log_{a^4}(16-x^2)^2=2$.

1149. $2-\log_{a^2}(1+x)=3\log_a \sqrt{x-1}-\log_{a^2}(a^2-1)^2$.

1150. $x^{\log_a x}=a^2 x$. 1151. $a^{2\log x-\log(6-x)}=1$.

1152. $a^{1+\log_3 x}+a^{1-\log_3 x}=a^2+1$.

1153. $\log_a(1-\sqrt{1-x})=\log_{a^2}(3-\sqrt{1+x})$.

1154. $\log_{\sqrt{x}} a \log_{a^2}\frac{a^2-4}{2a-x}=1$.

1155. $\frac{\log_x(2a-x)}{\log_x 2}+\frac{\log_a\sqrt{x}}{\log_a\sqrt{2}}=\frac{1}{\log_{a^2-1} 2}$.

Resuelvan los siguientes sistemas de ecuaciones:

1156. $\begin{cases}(3+a)x+2y=3\\ ax-y=3.\end{cases}$ 1157. $\begin{cases}(7-a)x+ay=5.\\ (1+a)x+3y=5.\end{cases}$

1158. $\begin{cases}x+ay=1\\ ax+y=a^2.\end{cases}$ 1159. $\begin{cases}x+y=a\\ x^4+y^4=a^4.\end{cases}$ 1160. $\begin{cases}(x-y)(x^2-y^2)=3a^3\\ (x+y)(x^2+y^2)=15a^3.\end{cases}$

1161. $\begin{cases}x+y+z=1\\ x+ay+z=a\\ x+y+az=a^2.\end{cases}$ 1162. $\begin{cases}ax+y=z\\ y+z=3ax\\ y^3+z^3=9a^3x^3.\end{cases}$

1163. $\begin{cases}x-y=8a^2\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4a.\end{cases}$ 1164. $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=1\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=a.\end{cases}$

Resuelvan las siguientes desigualdades:

1165. $a^2+ax<1-x$.

1166. $2x+3(ax-8)+\frac{x}{3}<4\left(x+\frac{1}{2}\right)-5$.

1167. $\frac{3ax+4}{3a+9}<\frac{x}{a+3}+\frac{3a-5}{3a-9}$.

1168. $\frac{|2ax+3|}{5x-4a}<4$. 1169. $\left|\frac{ax-5}{3}+x\right|<3$.

1170. $(2{,}5a+1)x^2+(a+2)x+a\leqslant 0$.

1171. $\sqrt{x}+2ax+3x>0$. 1172. $\sqrt{\dfrac{3x-1}{a-2}}<1$.

1173. $2\sqrt{x+a}>x+1$. 1174. $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}>a$.

1175. $\sqrt{x^2+x}<a-x$. 1176. $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a$.

1177. $\sqrt{1-x^2}<a-x$. 1178. $\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{2ax-x^2}>a$.

1179. $\sqrt{2ax-x^2}\geqslant a-x$. 1180. $\log_a(x-1)+\log_a x>2$.

1181. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x+a)>-3$. 1182. $\log_x(x-a)>2$.

1183. $\dfrac{\log_a(35-x^3)}{\log_a(5-x)}>3$. 1184. $\log_a\dfrac{1+\log_a^2 x}{1-\log_a x}<0$.

1185. $1+\log_x\dfrac{4-x}{10}(\log\log a-1)\log_x 10$.

1186. $\log_{\sqrt{2a}}(a+2x-x^2)<2$.

1187. ¿Con qué valores de a las dos raíces de la ecuación $x^2-6ax+(2-2a+9a^2)=0$ son mayores que 3?

1188. ¿Con qué valores de a las dos raíces de la ecuación $x^2-ax+2=0$ pertenecen al segmento $[0;\ 3]$?

1189. ¿Con qué valores de a la desigualdad $4^x-a\cdot 2^x-a+3\leqslant 0$ tiene, por lo menos, una solución?

1190. ¿Con qué valores de a la desigualdad $\dfrac{x-2a-1}{x-a}<0$ se verifica con toda x perteneciente a $[1;\ 2]$?

1191. ¿Con qué valores de a la desigualdad $(x-3a)(x-a-3)<0$ se verifica con toda x perteneciente a $[1;\ 3]$?

1192. ¿Con qué valores de a la ecuación $x\,|x+2a|+1-a=0$ sólo tiene una raíz?

1193. ¿Con qué valores de a la ecuación $x\,|x-2a|-1-a=0$ tiene una raíz?

1194. ¿Con qué valores de a la ecuación $x^2-4x-2\,|x-a|+a+2=0$ tiene dos raíces?

1195. ¿Con qué valores de a el sistema

$$\begin{cases} x^2+(5a+2)x+4a^2+2a<0 \\ x^2+a^2=4 \end{cases}$$

tiene, por lo menos, una solución?

1196. Con qué valores de a el sistema

$$\begin{cases} x^2+(2-3a)x+2a^2-2a<0 \\ ax=1 \end{cases}$$

tiene, por lo menos, una solución?

1197. ¿Con qué valores de a el sistema

$$\begin{cases} x^2-(3a+1)x+2a^2+2a<0 \\ x+a^2=0 \end{cases}$$

no tiene soluciones?

1198. Con qué valores de a el sistema

$$\begin{cases} x^2+\left(1-\frac{3}{2}a\right)x+\frac{a^2}{2}-\frac{a}{2}<0 \\ x=a^2-\frac{1}{2} \end{cases}$$

no tiene soluciones?

1199. Con qué valores de a el sistema

$$\begin{cases} |x^2-7x+6|+x^2+5x+6-12|x|=0 \\ x^2-2(a-2)x+a(a-4)=0 \end{cases}$$

tiene, exactamente, dos soluciones?

1200. ¿Con qué valores de a el sistema

$$\begin{cases} |x^2+5x+4|-9x^2+5x+4-10x|x|=0 \\ x^2-2(a+1)x+a(a+2)=0 \end{cases}$$

tiene una sola solución?

1201. ¿Con qué valores de a el sistema

$$\begin{cases} |x^2+7x+6|+x^2-5x+6-12|x|=0 \\ x^2-2(a+2)x+a(x+4)=0 \end{cases}$$

tiene dos soluciones?

1202. ¿Con qué valores de a la ecuación $\log(x^2+2ax)-\log(8x-6a-3)=0$ tiene la única raíz?

Segunda parte. TRIGONOMETRIA

Capítulo I
TRANSFORMACIONES IDÉNTICAS DE EXPRESIONES

§ 1. Transformaciones idénticas de expresiones trigonométricas

Recordemos las fundamentales reglas de trigonometría.

I. *Signos de las funciones trigonométricas por cuadrantes:*

Cuadrante	sen x	cos x	tg x	ctg x
I	+	+	+	+
II	+	−	−	−
III	−	−	+	+
IV	−	+	−	−

II. *Ciertos valores de las funciones trigonométricas:*

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—
ctg x	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0

III. *Paridad, periodicidad.*

La función $y = \cos x$ es par, las demás funciones trigonométricas son impares. Así, pues,

$$\cos(-x) = \cos x,$$
$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x,$$
$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n\right),$$
$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x \ (x \neq \pi n)^{*}.$$

Todas las funciones trigonométricas son periódicas. Con ello, $T = 2\pi$ es el período de las funciones $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, en tanto que $T = \pi$, el período de las funciones $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Así, pues,

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x - 2n) = \operatorname{sen} x,$$
$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x - 2\pi) = \cos x,$$
$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n\right),$$
$$\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg}(x - \pi) = \operatorname{ctg} x \ (x \neq \pi n).$$

IV. *Fórmulas que ligan las funciones trigonométricas de un mismo argumento:*

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1, \qquad (IV.1)$$
$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \qquad (IV.2)$$
$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \ (\alpha \neq \pi n). \qquad (IV.3)$$

V. *Fórmulas que ligan las funciones de argmuentos, uno de los cuales es dos veces mayor que el otro:*

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha, \qquad (V.1)$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha. \qquad (V.2)$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right), \qquad (V.3)$$
$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} \left(\alpha \neq \frac{\pi n}{2}\right), \qquad (V.4)$$
$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha, \qquad (V.5)$$
$$1 - \cos 2\alpha = 2\operatorname{sen}^2\alpha, \qquad (V.6)$$
$$1 \pm \operatorname{sen} 2\alpha = (\cos\alpha \pm \operatorname{sen}\alpha)^2. \qquad (V.7)$$

---

* Por doquier, en adelante, si no hay especiales reservas, se sobreentiende que los parámetros n, k, l, m, . . ., toman cualesquier valores enteros.

VI. *Fórmulas de adición de los argumentos*:

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta \cos\alpha, \qquad (VI.1)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta, \qquad (VI.2)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \alpha \pm \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi m\right), \qquad (VI.3)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha} \ (\alpha \neq \pi n,\ \beta \neq \pi k,\ \alpha \pm \beta \neq \pi m). \qquad (VI.4)$$

VII. *Fórmulas de reducción*:

x	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\operatorname{sen} x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{sen}\alpha$	$-\operatorname{sen}\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{sen}\alpha$
$\cos x$	$\operatorname{sen}\alpha$	$-\operatorname{sen}\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{sen}\alpha$	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

Para que sea más fácil retener en la memoria las fórmulas de reducción indicadas en la tabla, se puede aplicar la siguiente regla nemónica:

1) determinar la denominación de la función (si el arco α se diseña desde el diámetro horizontal ($\pi \pm \alpha$, $2\pi - \alpha$), el nombre de la función se conserva, si el arco α se diseña desde el diámetro vertical $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$, las funciones seno, coseno, tangente, cotangente cambian por coseno, seno, cotangente, tangente, respectivamente);

2) determinar el signo de la función; considerando el arco α como el del primer cuadrante, se halla el cuadrante en el que yace el arco $\frac{\pi n}{2} \pm \alpha$ y se determina el signo de la función dada en dicho cuadrante.

VIII. *Fórmulas de transformación de la adición de funciones trigonométricas en su producto*:

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad \text{(VIII.1)}$$

$$\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad \text{(VIII.2)}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad \text{(VIII.3)}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta-\alpha}{2}, \qquad \text{(VIII.4)}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\ \left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\right), \qquad \text{(VIII.5)}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\frac{\operatorname{sen}(\beta\pm\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}\ (\alpha\neq\pi n,\ \beta\neq\pi k). \qquad \text{(VIII.6)}$$

IX. *Fórmulas de transformación del producto de funciones trigonométricas en su suma*:

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta=\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)+\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{2}, \qquad \text{(IX.1)}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}, \qquad \text{(IX.2)}$$

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}. \qquad \text{(IX.3)}$$

EJEMPLO 1. Simplifiquemos la expresión

$$f(\alpha)=\frac{\operatorname{sen}^3(\alpha-270^\circ)\cos(360^\circ-\alpha)}{\operatorname{tg}^3(\alpha-90^\circ)\cos^3(\alpha-270^\circ)}.$$

SOLUCIÓN. Haciendo uso de la paridad de la función $y=\cos x$ e imparidad de $y=\operatorname{sen}x$, $y=\operatorname{tg}x$, obtenemos:

$$f(\alpha)=\frac{-\operatorname{sen}^3(270^\circ-\alpha)\cos(360^\circ-\alpha)}{-\operatorname{tg}^3(90^\circ-\alpha)\cos^3(270^\circ-\alpha)}.$$

Empleando las fórmulas de reducción, hallamos:

$$f(\alpha)=\frac{-\cos^3\alpha\cdot\cos\alpha}{\operatorname{ctg}^3\alpha\,(-\operatorname{sen}^3\alpha)}=\frac{\cos^4\alpha}{\frac{\cos^3\alpha}{\operatorname{sen}^3\alpha}\cdot\operatorname{sen}^3\alpha}=\cos\alpha.$$

La expresión inicial es idénticamente igual a $\cos\alpha$ sobre el conjunto de tales α que $\operatorname{sen}\alpha\neq0$, $\cos\alpha\neq0$, es decir, con $\alpha\neq\frac{\pi n}{2}$.

EJEMPLO 2. Demostremos la identidad:

$$\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{4}\operatorname{sen}2\alpha.$$

SOLUCIÓN. Transformemos el primer miembro de la identidad:

$$\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos^2\alpha}{\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}-\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha}{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}}=\cos^2\alpha\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}},$$

Pero (véanse las fórmulas (V.1) y (V.2), pág. 210)

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha,\ \cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha,$$

por lo que

$$\cos^2\alpha\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2}\cos^2\alpha\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}\operatorname{sen}2\alpha.$$

La identidad demostrada es válida a condición de que: $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\times$ $\times\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0$ y $\cos\alpha\neq 0$, o sea, con $\operatorname{sen}\alpha\neq 0$ y $\cos\alpha\neq 0$, es decir, con $\alpha\neq\frac{\pi n}{2}$.

EJEMPLO 3. Demostremos la identidad

$$\frac{\operatorname{tg}^2 2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{tg}3\alpha\operatorname{tg}\alpha.$$

SOLUCIÓN. Desarrollemos en factores el numerador y denominador de la expresión en el primer miembro de la identidad:

$$\frac{\operatorname{tg}^2 2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{(\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}\alpha)}{(1-\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha)}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}\cdot\frac{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}.$$

A continuación, empleando la fórmula (VI.3) (pág. 211), hallamos:

$$\operatorname{tg}(2\alpha+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(2\alpha-\alpha)=\operatorname{tg}3\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

La identidad demostrada es válida con $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $2\alpha\neq$ $\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $3\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi m$, es decir, con $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$ y $\alpha\neq$

$\neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{3}$ (el conjunto P de todos los números de la forma $\frac{\pi}{2} + \pi k$ está contenido en el conjunto M de todos los números de la forma $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{3}$).

EJEMPLO 4. Demostremos la identidad

$$4 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} (60^\circ - \alpha) \operatorname{sen} (60^\circ + \alpha) = \operatorname{sen} 3\alpha.$$

SOLUCIÓN. Aquí, es conveniente emplear para el primer miembro de la identidad las fórmulas del grupo IX (pág. 212). Tenemos:

$$4 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} (60^\circ - \alpha) \operatorname{sen} (60^\circ + \alpha) =$$

$$= 4 \operatorname{sen} \alpha \frac{\cos (60^\circ - \alpha - 60^\circ - \alpha) - \cos (60^\circ - \alpha + 60^\circ + \alpha)}{2} =$$

$$= 2 \operatorname{sen} \alpha (\cos (-2\alpha) - \cos 120^\circ) = 2 \operatorname{sen} \alpha \left(\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2 \operatorname{sen} \alpha \cos 2\alpha + \operatorname{sen} \alpha = 2 \frac{\operatorname{sen} (\alpha - 2\alpha) + \operatorname{sen} (\alpha + 2\alpha)}{2} +$$

$$+ \operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 3\alpha + \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} 3\alpha.$$

Es evidente, que la identidad demostrada es válida con todos los valores reales de α.

EJEMPLO 5. Comprobemos la igualdad

$$\operatorname{sen} 47^\circ + \operatorname{sen} 61^\circ - \operatorname{sen} 11^\circ - \operatorname{sen} 25^\circ = \cos 7^\circ.$$

SOLUCIÓN. Para la transformación del primer miembro de la igualdad empleemos las fórmulas del grupo VIII. Tenemos:

$$(\operatorname{sen} 47^\circ + \operatorname{sen} 61^\circ) - (\operatorname{sen} 11^\circ + \operatorname{sen} 25^\circ) = 2 \operatorname{sen} 54^\circ \cos 7^\circ -$$

$$- 2 \operatorname{sen} 18^\circ \cos 7^\circ = 2 \cos 7^\circ (\operatorname{sen} 54^\circ - \operatorname{sen} 18^\circ) =$$

$$= 2 \cos 7^\circ \cdot 2 \operatorname{sen} 18^\circ \cos 36^\circ.$$

Si la expresión obtenida se multiplica y divide por $\cos 18^\circ$, es posible hacer uso de que $2 \operatorname{sen} 18^\circ \cos 18^\circ = \operatorname{sen} 36^\circ$.

Entonces, obtenemos:

$$2 \cos 7^\circ \cdot \frac{\operatorname{sen} 36^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \cos 7^\circ \cdot \frac{\operatorname{sen} 72^\circ}{\cos 18^\circ} = \cos 7^\circ \cdot \frac{\cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} = \cos 7^\circ.$$

Así, pues, la igualdad inicial es cierta.

Observación. En muchos casos, cuando tenemos el producto de la forma $\operatorname{sen} \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cdot \ldots \cdot \cos 2^n\alpha$ o de la forma $\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cdot \ldots \cdot 2^n\alpha$, es útil el procedimiento que utilizamos en el ejemplo 5. Él consiste en que la expresión dada se multiplica y divide por $\cos \alpha$ o bien, por $\operatorname{sen} \alpha$, con el fin de que después de utilizar la fórmula $2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \operatorname{sen} 2\alpha$, seguidamente la fórmula $2 \operatorname{sen} 2 \alpha \cos 2 \alpha = \operatorname{sen} 4 \alpha$, etc., simplificar la expresión dada. Ilustremos lo dicho con un ejemplo.

EJEMPLO 6. Calculemos $\cos\frac{\pi}{65}\cos\frac{2\pi}{65}\cos\frac{4\pi}{65}\cos\frac{8\pi}{65}\cos\frac{16\pi}{65}\times$ $\times\cos\frac{32\pi}{65}$.

SOLUCIÓN. Designemos el producto dado con A. Multipliquemos y dividamos A por $2\operatorname{sen}\frac{\pi}{65}$. Como $2\operatorname{sen}\frac{\pi}{65}\cos\frac{\pi}{65}=\operatorname{sen}\frac{2\pi}{65}$,

$$A=\frac{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{65}\cos\frac{2\pi}{65}\cos\frac{4\pi}{65}\cos\frac{8\pi}{65}\cos\frac{16\pi}{65}\cos\frac{32\pi}{65}}{2\operatorname{sen}\frac{\pi}{65}}.$$

A continuación, tenemos:

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{65}\cos\frac{2\pi}{65}=\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{4\pi}{65};\ \operatorname{sen}\frac{4\pi}{65}\cos\frac{4\pi}{65}=\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{8\pi}{65},$$

etc. Como resultado, obtenemos

$$A=\frac{\operatorname{sen}\frac{64\pi}{65}}{2^6\operatorname{sen}\frac{\pi}{65}}=\frac{\operatorname{sen}\left(\pi-\frac{\pi}{65}\right)}{64\operatorname{sen}\frac{\pi}{65}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{65}}{64\operatorname{sen}\frac{\pi}{65}}=\frac{1}{64}.$$

EJEMPLO 7. Sabemos que $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$ y $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Hallemos los valores de las demás funciones trigonométricas del argumento α.

SOLUCIÓN. Ante todo hallemos el valor de $\operatorname{ctg}\alpha$.

Tenemos: $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{4}{3}$. A continuación, de la fórmula (IV. 2), obtenemos:

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{16}{25}.$$

Es decir, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ o bien $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$. Pero, de acuerdo con el planteamiento, α pertenece al segundo cuadrante, donde el coseno sólo toma valores negativos. Así, pues, $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$.

Como $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha$, de donde $\operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{5}$. De modo que $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{4}{3}$, $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$; $\operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{5}$.

EJEMPLO 8. Calculemos $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ si $\alpha=112°30'$.

SOLUCIÓN. De la fórmula (V.5) se desprende

$$|\cos\alpha|=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}.$$

Como $90°<112°30'<180°$, $\cos\alpha<0$.

Según el planteamiento $2\alpha = 225°$, es decir,

$$\cos 112°30' = -\sqrt{\frac{1+\cos 225°}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

De modo análogo, empleando la fórmula (V.6) y teniendo en cuenta que, según el planteamiento, α es un ángulo del segundo cuadrante, obtenemos:

$$\operatorname{sen} 112°30' = \sqrt{\frac{1-\cos 225°}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 112°30' = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = -(1+\sqrt{2}),$$

$$\operatorname{ctg} 112°30' = \frac{1}{-(1+\sqrt{2})} = 1-\sqrt{2}.$$

EJEMPLO 9. Calculemos $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$ si $\cos\alpha = -0{,}6$ y $180° < \alpha < 270°$.

SOLUCIÓN. Del planteamiento se deduce que $45° < \frac{\alpha}{4} < 67°30'$. Pero, entonces $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} > 0$. Empleando las fórmulas (V.5) y (V.6), obtenemos:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\frac{\alpha}{2}}}.$$

Como de acuerdo con el planteamiento $180° < \alpha < 270°$, es decir, $90° < \frac{\alpha}{2} < 135°$, $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$. De modo que

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1-0{,}6}{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{y} \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}}{5}}{1-\frac{\sqrt{5}}{5}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

EJEMPLO 10. Calculemos $16\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{3\alpha}{2}$ si $\cos\alpha = \frac{3}{4}$.

SOLUCIÓN. Según la fórmula (IX. 3) y, a continuación, (V.5) obtenemos

$$16\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{3\alpha}{2}=16\,\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{3\alpha}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3\alpha}{2}\right)}{2}=$$
$$=8(\cos\alpha-\cos 2\alpha)=8(\cos\alpha-2\cos^2\alpha+1).$$

Pero $\cos\alpha=\frac{3}{4}$, por lo que

$$16\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{3\alpha}{2}=8\left(\frac{3}{4}-2\left(\frac{3}{4}\right)^2+1\right)=5.$$

EJEMPLO 11. Demostremos que si $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$ y $\alpha+\beta+$ $+\gamma=\frac{\pi}{2}$,

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=1. \qquad (1)$$

SOLUCIÓN. Transformemos el primer miembro de la igualdad, tomando en consideración que, de acuerdo con el planteamiento, $\gamma=\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)$:

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+$$
$$+\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha)=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)\times$$
$$\times(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=$$
$$=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=$$
$$=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+$$
$$+1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=1.$$

De este modo, la identidad (1) queda demostrada.

EJEMPLO 12. Demostremos que si $\frac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$,

$$\sqrt{2\operatorname{ctg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}}=-1-\operatorname{ctg}\alpha. \qquad (2)$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos:

$$\sqrt{2\operatorname{ctg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}}=\sqrt{2\operatorname{ctg}\alpha+1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=$$
$$=\sqrt{(1+\operatorname{ctg}\alpha)^2}=|1+\operatorname{ctg}\alpha|.$$

Como en el intervalo $\frac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$ se verifica la desigualdad $\operatorname{ctg}\alpha<-1$, en ese intervalo $1+\operatorname{ctg}\alpha<0$ y, por consiguiente, $|1+\operatorname{ctg}\alpha|=-1-\operatorname{ctg}\alpha$.

Así, pues, si $\frac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$, la identidad (2) está demostrada.

EJEMPLO 13. Demostremos que si $\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$, donde $\alpha+\beta\neq\pi k$,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{1}{3}. \qquad (3)$$

DEMOSTRACIÓN. Transformando los miembros primero y segundo de la igualdad $\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ según las fórmulas de los grupos VIII y VI, obtenemos:

$$2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=4\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \qquad (4)$$

Como $\alpha+\beta\neq\pi k$, es decir, $\frac{\alpha+\beta}{2}\neq\frac{\pi k}{2}$, $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\neq 0$ y $\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\neq 0$ y, entonces, de la igualdad (4) se desprende:

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \qquad (5)$$

Consideremos la expresión $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. Tendremos:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

(hemos empleado las fórmulas (IX.3) y (IX.2)). Haciendo uso de la igualdad (5), obtenemos:

$$\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{1}{3}.$$

Así, pues, la igualdad (3) queda demostrada.

EJEMPLO 14. Demostremos que si

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{7},\quad \operatorname{sen}\beta=\frac{1}{\sqrt{10}},\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\ \text{y}\ 0<\beta<\frac{\pi}{2},$$

$$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}.$$

SOLUCIÓN. Calculemos $\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)$. Tenemos:

$$\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\beta}=\frac{\frac{1}{7}+\operatorname{tg}2\beta}{1-\frac{1}{7}\operatorname{tg}2\beta}.$$

Ahora, hay que hallar el valor de $\operatorname{tg} 2\beta$. Con este fin hacemos uso de que $\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Tenemos:

$$\cos\beta = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\beta} = \sqrt{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{1}{3},$$

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4}.$$

Es decir, $\operatorname{tg}(\alpha+2\beta) = \dfrac{\frac{1}{7}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{4}} = 1.$

De acuerdo con el planteamiento $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ y $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, así que $0 < 2\beta < \pi$, pero $\operatorname{tg} 2\beta = \frac{3}{4} > 0$, o sea, $0 < 2\beta < \frac{\pi}{2}$ y, por lo tanto, $0 < \alpha + 2\beta < \pi$. Pero en el intervalo $]0; \pi[$ la función $\operatorname{tg} x$ toma el valor 1 sólo en el punto $\frac{\pi}{4}$. Esto significa que $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}$.

EJERCICIOS

Simplifiquen las expresiones:

1203. $\dfrac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{sen}(\pi-\alpha)}$.

1204. $\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}{\cos(\pi-\alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)} - \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos(2\pi-\beta)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}$.

1205. $\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$ 1206. $\dfrac{2}{\operatorname{sen} 4\alpha} - \operatorname{ctg} 2\alpha$.

1207. $\dfrac{\operatorname{tg}^2(45^\circ+\alpha)-1}{\operatorname{tg}^2(45^\circ+\alpha)+1}$. 1208. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\dfrac{1-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.

1209. $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.

1210. $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha\cos 2\beta$.

1211. $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}3\alpha+\operatorname{sen}5\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha}$.

1212. $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}3\alpha+\operatorname{sen}5\alpha+\operatorname{sen}7\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+\cos7\alpha}$.

1213. $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}3\alpha+\operatorname{sen}5\alpha+\ldots+\operatorname{sen}(2n-1)\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+\ldots+\cos(2n-1)\alpha}$.

1214. $\dfrac{\sqrt{2}-\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha}$. 1215. $\cos4\alpha+4\cos2\alpha+3$.

1216. $\dfrac{\operatorname{sen}4\alpha}{1+\cos4\alpha}\cdot\dfrac{\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}$. 1217. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 2\alpha-4\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2 2\alpha+4\operatorname{sen}^2\alpha-4}$.

1218. $\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

1219. $\dfrac{\operatorname{sen}(60^\circ+\alpha)}{4\operatorname{sen}\left(15^\circ+\dfrac{\alpha}{4}\right)\operatorname{sen}\left(75^\circ-\dfrac{\alpha}{4}\right)}$.

Comprueben las igualdades:

1220. $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{1}{4}$. 1221. $\operatorname{tg}55^\circ-\operatorname{tg}35^\circ=2\operatorname{tg}20^\circ$.

1222. $8\cos10^\circ\cos20^\circ\cos40^\circ=\operatorname{ctg}10^\circ$.

1223. $\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{3\pi}{5}=-\dfrac{1}{4}$. 1224. $\cos\dfrac{\pi}{5}+\cos\dfrac{3\pi}{5}=\dfrac{1}{2}$.

1225. $\operatorname{tg}30^\circ+\operatorname{tg}40^\circ+\operatorname{tg}50^\circ+\operatorname{tg}60^\circ=\dfrac{8\sqrt{3}\cos20^\circ}{3}$.

1226. $\operatorname{sen}70^\circ+8\cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ=2\cos^2 10^\circ$.

1227. $\dfrac{1-4\operatorname{sen}10^\circ\operatorname{sen}70^\circ}{2\operatorname{sen}10^\circ}=1$.

1228. $\cos24^\circ+\cos48^\circ-\cos84^\circ-\cos12^\circ=\dfrac{1}{2}$.

1229. $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}$.

1230. $\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}40^\circ+\operatorname{tg}80^\circ-\operatorname{tg}60^\circ=8\operatorname{sen}40^\circ$.

1231. $\operatorname{tg}^6 20^\circ-33\operatorname{tg}^4 20^\circ+27\operatorname{tg}^2 20^\circ=3$.

1232. $\operatorname{sen}^2\dfrac{\pi}{7}\operatorname{sen}^2\dfrac{2\pi}{7}\operatorname{sen}^2\dfrac{3\pi}{7}=\dfrac{7}{64}$. 1233. $\operatorname{tg}^2 36^\circ\cdot\operatorname{tg}^2 72^\circ=5$.

1234. $\operatorname{tg}55^\circ\operatorname{tg}65^\circ\operatorname{tg}75^\circ=\operatorname{tg}85^\circ$. 1235. $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{7}\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{7}\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{7}=\sqrt{7}$.

1236. $\cos\dfrac{\pi}{20}\cos\dfrac{3\pi}{20}\cos\dfrac{7\pi}{20}\cos\dfrac{9\pi}{20}=-\cos\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{8\pi}{15}$.

Demuestren las identidades:

1237. $\dfrac{\operatorname{sen}(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma}+\dfrac{\operatorname{sen}(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\cos\alpha}+\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=0$.

1238. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 3\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}-\dfrac{\cos^2 3\alpha}{\cos^2\alpha}=8\cos2\alpha$.

1239. $\sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\beta-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}2\alpha\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta}=|\cos(\alpha+\beta)|$.

1240. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+$
$+\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\cos(\pi+\alpha)\cos(2\pi-\alpha)=0.$

1241. $\operatorname{sen}(\alpha-270^\circ)\cos(\alpha+90^\circ)\operatorname{tg}(3\alpha-180^\circ)=$
$=\cos(180^\circ-\alpha)\operatorname{sen}(180^\circ-\alpha)\operatorname{ctg}(90^\circ-3\alpha).$

1242. $3(\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x)-2(\operatorname{sen}^6 x+\cos^6 x)=1.$

1243. $\frac{\operatorname{tg}^3\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}-\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}+\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha}{\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha.$

1244. $\frac{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\operatorname{sen}^3\alpha+\operatorname{sen}3\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=3.$

1245. $\frac{\cos 2\alpha}{1+\operatorname{sen}2\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}.$

1246. $1-\operatorname{sen}8\alpha=2\cos^2(45^\circ+4\alpha).$

1247. $\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{\cos\alpha}-\operatorname{tg}\alpha.$

1248. $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{sen}^{-1}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{2\cos\alpha}{1-\cos 2\alpha}.$

1249. $\operatorname{tg}^2\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\cos^{-1}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos^{-1}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}.$

1250. $(\cos\alpha+\operatorname{sen}\beta)^2+(\operatorname{sen}\alpha-\cos\beta)^2=4\cos^2\left(45^\circ+\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$

1251. $2\left(\frac{1}{\operatorname{sen}2\alpha}+\operatorname{ctg}2\alpha\right)=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$

1252. $\frac{1-2\cos^2\varphi}{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}=\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{ctg}\varphi.$

1253. $\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha}-\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}=2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$

1254. $4\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=4\operatorname{sen}^2\alpha-3.$

1255. $2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta).$

1256. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)=$
$=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}.$

1257. $\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2\cos\beta}.$

1258. $\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos 3\alpha-\frac{1}{2}\cos 5\alpha=8\operatorname{sen}^2\alpha\cos^3\alpha.$

1259. $\frac{2\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}3\alpha+\operatorname{sen}5\alpha}{\cos\alpha-2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}=-\frac{2\cos 2\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$

1260. $\cos\alpha+\cos(120^\circ-\alpha)+\cos(120^\circ+\alpha)=0.$

1261. $\operatorname{tg}(35^\circ+\alpha)\operatorname{tg}(25^\circ-\alpha)=\frac{2\cos(10^\circ+2\alpha)-1}{2\cos(10^\circ+2\alpha)+1}.$

1262. $$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\alpha}{1-\frac{1}{2}\cos 2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} 2\alpha}=\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right).$$

Calculen sin emplear las tablas:

1263. $\frac{\operatorname{sen} 10^\circ \cos 20^\circ+\cos 10^\circ \operatorname{sen} 20^\circ}{\cos 19^\circ \cos 11^\circ-\operatorname{sen} 19^\circ \operatorname{sen} 11^\circ}$.

1264. $\frac{\operatorname{sen} 9^\circ \cos 39^\circ-\cos 9^\circ \operatorname{sen} 39^\circ}{\cos \frac{3\pi}{7}\cos \frac{5\pi}{28}+\operatorname{sen} \frac{3\pi}{7}\operatorname{sen} \frac{5\pi}{28}}$.

1265. $\cos 15^\circ$. 1266. $\operatorname{tg} 15^\circ$. 1267. $\operatorname{sen} 285^\circ$. 1268. $\cos 165^\circ$.
1269. $\cos 292^\circ 30'$.
1270. $2 \operatorname{sen} 40^\circ+2\cos 130^\circ-3\operatorname{sen} 100^\circ-3\cos(-110^\circ)$.
1271. $\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$.
1272. $16 \operatorname{sen} 10^\circ \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} 50^\circ \operatorname{sen} 70^\circ \operatorname{sen} 90^\circ$.
1273. $\operatorname{tg} 9^\circ-\operatorname{tg} 27^\circ-\operatorname{tg} 63^\circ+\operatorname{tg} 81^\circ$.

1274. Calculen $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ si $\operatorname{ctg}\alpha=-2$ y $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

1275. Calculen $\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ si $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ y $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

1276. Calculen $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ si $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{12}{13}$ y $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

1277. Calculen $\operatorname{sen} 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{ctg} 2\alpha$ si $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ y $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

1278. Calculen $\frac{5\operatorname{sen}\alpha+7\cos\alpha}{6\cos\alpha-3\operatorname{sen}\alpha}$ si $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{15}$.

1279. Calculen $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$ si $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{12}{13}$ y $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$.

1280. Demuestren que $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ si $\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{sen}\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$,

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

1281. Hallen: a) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$; b) $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha$; c) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$ si $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=m$.

1282. Calculen $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ si a) $\cos\alpha=0{,}8$ y $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

b) $\operatorname{tg}\alpha=3\frac{3}{7}$ y $180^\circ<\alpha<270^\circ$.

1283. Calculen $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{4}$ si $\operatorname{sen}\alpha=\frac{336}{625}$ y $450^\circ<\alpha<540^\circ$.

1284. Demuestren que $\operatorname{sen} x=\frac{2a}{1+a^2}$, $\cos x=\frac{1-a^2}{1+a^2}$, $\operatorname{tg} x=\frac{2a}{1-a^2}$, $\operatorname{ctg} x=$

$=\frac{1-a^2}{2a}$ si $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=a$.

1285. Calculen $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ si $\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{2}$ y $0<\alpha<\frac{\pi}{6}$.

Demuestren las identidades:

1286. $1+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)$.

1287. $\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha)\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)$.

1288. $\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha\cos8\alpha\cos16\alpha=\frac{\operatorname{sen}32\alpha}{32\operatorname{sen}\alpha}$.

1289. $9\cos15\alpha+3\cos7\alpha+3\cos19\alpha+9\cos11\alpha=24\cos^3 2\alpha\cos13\alpha$.

1290. $\frac{1+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\operatorname{sen}^{-1}\alpha-\cos^{-1}\alpha-\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}\operatorname{sen}2\alpha}{4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$.

1291. $3-4\cos2\alpha+\cos4\alpha=8\operatorname{sen}^4\alpha$.

1292. $\sqrt{\frac{1}{1+\cos\alpha}+\frac{1}{1-\cos\alpha}}\operatorname{sen}\alpha=\sqrt{2}$ si $0<\alpha<\pi$.

1293. $\sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}}=-\frac{2}{\operatorname{sen}2\alpha}$ si $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$.

1294. $\sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha\,(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^2\alpha\,(1+\operatorname{tg}\alpha)}=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ si $-\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant$
$\leqslant\frac{3\pi}{4}$, $\alpha\neq0$.

1295. $\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha+\cos\alpha}+\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha-\cos\alpha}=2\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}$ si $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$.

1296. $\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen}\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha}}=$

$$=\begin{cases}2\operatorname{tg}\alpha \text{ si } -\frac{\pi}{2}+2\pi k<\alpha<\frac{\pi}{2}+2\pi k\\ -2\operatorname{tg}\alpha \text{ si } \frac{\pi}{2}+2\pi k<\alpha<\frac{3\pi}{2}+2\pi k.\end{cases}$$

1297. $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+2}=\begin{cases}\frac{2}{\operatorname{sen}2\alpha} \text{ si } \pi k<\alpha<\frac{\pi}{2}+\pi k\\ -\frac{2}{\operatorname{sen}2\alpha} \text{ si } -\frac{\pi}{2}+\pi k<\alpha<\pi k.\end{cases}$

1298. $\sqrt{1+\cos2\alpha}+\sqrt{1-\cos2\alpha}+\sqrt{2}(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)=$

$$=\begin{cases}2\sqrt{2}(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha) & \text{si } 2\pi k\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}+2\pi k\\ 2\sqrt{2}\operatorname{sen}\alpha & \text{si } \frac{\pi}{2}+2\pi k<\alpha<\pi+2\pi k\\ 0 & \text{si } \pi+2\pi k\leqslant\alpha\leqslant\frac{3}{2}\pi+2\pi k\\ 2\sqrt{2}\cos\alpha & \text{si } \frac{3\pi}{2}+2\pi k<\alpha<2\pi+2\pi k.\end{cases}$$

1299. $\sqrt{1+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}=$

$$=\begin{cases}\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) \text{ si } -\frac{\pi}{4}+2\pi k\leqslant\alpha\leqslant\frac{3\pi}{4}+2\pi k\\ -\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) \text{ si } \frac{3\pi}{4}+2\pi k<\alpha<\frac{7\pi}{4}+2\pi k.\end{cases}$$

1300. $\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}(30^\circ-\alpha)+\operatorname{tg} 2\alpha(60^\circ-\alpha)+\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha)=1.$

1301. $\operatorname{sen}^3\alpha \operatorname{sen}^3(\beta-\gamma)+\operatorname{sen}^3\beta \operatorname{sen}^3(\gamma-\alpha)+\operatorname{sen}^3\gamma \operatorname{sen}^3(\alpha-\beta)=$
$=3 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\operatorname{sen}(\beta-\gamma)\operatorname{sen}(\gamma-\alpha).$

1302. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}$ si $\alpha+\beta+\gamma=\pi.$

1303. $\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ si $\alpha+\beta+\gamma=\pi.$

1304. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$ si $\alpha+\beta+\gamma=\pi.$

1305. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-1=(-1)^n\, 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ si $\alpha+\beta+\gamma=\pi n.$

1306. $\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}$, si $\alpha+\beta=\gamma,$

1307. $\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma+\operatorname{sen}\delta=4\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta+\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma+\alpha}{2}$ si $\alpha+$
$+\beta+\gamma+\delta=2\pi.$

1308. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos^2\gamma-\cos^2\delta=2\operatorname{sen}(\beta+\gamma)\operatorname{sen}(\alpha+\gamma)\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ si $\alpha+$
$+\beta+\gamma+\delta=2\pi.$

Demuestren que:

1309. Si $\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{ctg}2\beta-\operatorname{ctg}2\gamma=\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{ctg}2\beta\operatorname{ctg}2\gamma$, $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}n.$

1310. Si $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, $\alpha+\beta+\gamma=\pi n.$

1311. Si $\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}^2\beta+\operatorname{sen}^2\gamma-2=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$

$$\left[\begin{array}{l}\alpha+\beta+\gamma=\pi(2k+1)\\ \alpha-\beta+\gamma=\pi(2l+1)\\ \alpha+\beta-\gamma=\pi(2m+1)\\ \alpha-\beta-\gamma=\pi(2n+1).\end{array}\right.$$

1312. Si $m\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-\beta)$, $\frac{1}{1-m\operatorname{sen}2\alpha}+\frac{1}{1-m\operatorname{sen}2\beta}=\frac{2}{1-m^2}.$

1313. Si $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=m$, $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=m-1$

1314. Si $3\operatorname{sen}\beta=\operatorname{sen}(2\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=2\operatorname{tg}\alpha.$

1315. Si $\operatorname{sen}^2\beta=\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\beta=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).$

1316. Si $\operatorname{sen}(2\alpha+\beta)=2\operatorname{sen}\beta$ y $\beta\neq\pi k$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=3\operatorname{tg}\alpha.$

1317. Si $\begin{cases}\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha=m\\ \operatorname{sen}2\alpha=n-m^2,\end{cases}$ donde $-\sqrt{2}\leqslant m\leqslant\sqrt{2}$, $n=1.$

1318. Si $\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta=m,\\ \operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta=n,\end{cases}$ donde $\begin{cases}m\neq 0\\ n\neq 0,\end{cases}$ $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\frac{2mn}{m^2+n^2}.$

1319. Si $\begin{cases}m\operatorname{ctg}\alpha=a\\ b\operatorname{sen}2\alpha=n,\end{cases}$ $n(a^2+m^2)=2abm.$

1320. Si $\begin{cases}\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha=m\\ \operatorname{sen}^3\alpha+\cos^3\alpha=n,\end{cases}$ $m^3-3m+2n=0.$

1321. Si $\begin{cases}\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha=m\\ \frac{1}{\cos\alpha}-\cos\alpha=n,\end{cases}$ $m\sqrt[3]{m^2n}-n\sqrt[3]{mn^2}=1.$

1322. Si $\begin{cases}a\cos^3\alpha+3a\cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha=m\\ a\operatorname{sen}^3\alpha+3a\cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha=n.\end{cases}$
$\sqrt[3]{(m+n)^2}+\sqrt[3]{(m-n)^2}=2\sqrt[3]{a}.$

§ 2. Transformación de las expresiones que contienen funciones trigonométricas inversas

Recordemos la definición de funciones trigonométricas inversas.

1) $y = \operatorname{arcsen} x$ es una función definida en el segmento $[-1; 1]$, inversa a la función $x = \operatorname{sen} y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Así, pues,

$$(y = \operatorname{arcsen} x) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} y = x. \end{cases}$$

Para toda x del segmento $[-1; 1]$, tenemos:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arcsen} x \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{1}$$

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x. \tag{2}$$

2) $y = \arccos x$ es una función definida en el segmento $[-1; 1]$, inversa a la función $x = \cos y$, $y \in [0; \pi]$. De este modo,

$$(y = \arccos x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant \pi \\ \cos y = x. \end{cases}$$

Para toda x del segmento $[-1; 1]$, tenemos:

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi, \tag{3}$$

$$\cos(\arccos x) = x. \tag{4}$$

3) $y = \operatorname{arctg} x$ es una función definida en $]-\infty; \infty[$, inversa a la función $x = \operatorname{tg} y$, $y \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Así, pues,

$$(y = \operatorname{arctg} x) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{tg} y = x. \end{cases}$$

Para toda x, tenemos

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}, \tag{5}$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x. \tag{6}$$

4) $y = \operatorname{arcctg} x$ es una función definida en $]-\infty; \infty[$, inversa a la función $x = \operatorname{ctg} y$, $y \in]0; \pi[$. Así, pues,

$$y = \operatorname{arcctg} x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < y < \pi \\ \operatorname{ctg} y = x. \end{cases}$$

Para toda x, tenemos:

$$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi, \tag{7}$$

$$\operatorname{ctg} (\operatorname{arcctg} x) = x. \tag{8}$$

Las funciones $y = \operatorname{arcsen} x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ reciben el nombre de *funciones trigonométricas inversas o ciclométricas*.

Señalemos ciertas identidades de importancia:

$\operatorname{arcsen} (-x) = -\operatorname{arcsen} x$, $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$,

$\arccos (-x) = \pi - \arccos x$, $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$,

$\operatorname{arctg} (-x) = -\operatorname{arctg} x$,

$\operatorname{arcctg} (-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

Examinemos ejemplos.

EJEMPLO 1. Simplifiquemos la expresión $\cos (\operatorname{arcsen} x)$, donde $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

SOLUCIÓN. Hagamos $\operatorname{arcsen} x = y$. Entonces $\operatorname{sen} y = x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$. Ahora, para hallar $\cos y$ empleemos la relación $\cos^2 y = 1 - \operatorname{sen}^2 y$. O sea, $\cos^2 y = 1 - x^2$. Pero $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ y en este segmento el coseno sólo toma valores no negativos.

Así, pues, $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$, es decir, $\cos (\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - x^2}$, donde $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

EJEMPLO 2. Simplifiquemos la expresión $\cos (2 \operatorname{arcsen} x)$.

SOLUCIÓN. $\cos (2 \operatorname{arcsen} x) = \cos^2 (\operatorname{arcsen} x) - \operatorname{sen}^2 (\operatorname{arcsen} x) = (1 - x^2) - x^2 = 1 - 2x^2$.

EJEMPLO 3. Simplifiquemos la expresión $\operatorname{sen} (\operatorname{arctg} x)$.

SOLUCIÓN. Hagamos $y = \operatorname{arctg} x$. Entonces, $\operatorname{tg} y = x$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Para hallar $\cos y$ hagamos uso de la igualdad $\cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}$. Pero $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ y en todo este intervalo el coseno sólo toma valores positivos. Por esto, $\cos y = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 y}}$, es decir, $\cos (\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Como $\operatorname{sen} y = \operatorname{tg} y \cdot \cos y$, $\operatorname{sen} (\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

EJEMPLO 4. Calculemos $\operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arcctg} \left(-\frac{3}{4}\right)\right)$.

SOLUCIÓN. Sea $\operatorname{arcctg} \left(-\frac{3}{4}\right) = \alpha$. Entonces, $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{3}{4}$, $0 < \alpha < \pi$ (con mayor precisión, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, ya que $\operatorname{ctg} \alpha < 0$). Hay que calcular $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$. Tenemos: $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$.

Empleando la fórmula $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, hallamos $\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$. Pero según el planteamiento $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, y en este intervalo $\cos\alpha<0$, por lo tanto, $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

Conociendo $\cos\alpha$ podemos hallar $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ haciendo uso de la fórmula $1-\cos\alpha=2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$. Obtenemos $\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{4}=\frac{4}{5}$, de donde $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ o bien $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=-\frac{2}{\sqrt{5}}$. Pero, $\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$, y en este intervalo el seno sólo toma valores positivos. Así, pues,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right)=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

EJEMPLO 5. Calculemos $\arccos\left(\cos\left(-\frac{17}{5}\pi\right)\right)$.

Hagamos $y=\arccos\left(\cos\left(-\frac{17}{5}\right)\right)$. Entonces, $\cos y=\cos\left(-\frac{17}{5}\pi\right)$, $0\leqslant y\leqslant\pi$. Tenemos: $\cos\left(-\frac{17}{5}\pi\right)=\cos\left(-4\pi+\frac{3}{5}\pi\right)=\cos\frac{3}{5}\pi$. De este modo, $\cos\frac{3}{5}\pi=\cos y$ y, como $0<\frac{3}{5}\pi<\pi$, $y=\frac{3}{5}\pi$.

OBSERVACIÓN. La igualdad $\arccos\left(\cos\left(-\frac{17}{5}\pi\right)\right)=-\frac{17}{5}\pi$ no es cierta, ya que es evidente que el arcocoseno no puede tener un valor igual a $\left(-\frac{17}{5}\pi\right)$ (véase la relación (3), pág. 225).

EJEMPLO 6. Demostremos que

$$\arccos\frac{1}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)=\arccos\left(-\frac{13}{14}\right). \qquad (9)$$

DEMOSTRACIÓN. Hagamos $\alpha=\arccos\frac{1}{2}$, $\beta=\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)$, $\gamma=$ $=\arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$. Entonces, $\alpha=\frac{\pi}{3}$ $\cos\beta=-\frac{1}{7}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$; $\cos\gamma=-\frac{13}{14}$, $\frac{\pi}{2}<\gamma<\pi$.

Demostremos que $\alpha+\beta=\gamma$. Con este fin examinemos la igualdad $T(\alpha+\beta)=T(\gamma)$, donde T es cierta función trigonométrica. Pero de la igualdad $T(\alpha+\beta)=T(\gamma)$, hablando en general, aún no se deduce la igualdad $\alpha+\beta=\gamma$ (p. ej., sen 30° = sen 150°, pero 30° ≠ 150°). La igualdad $\alpha+\beta=\gamma$ tendrá lugar si $\alpha+\beta$ y γ pertenecen a un mismo intervalo de monotonía de la función T.

En el ejemplo que consideramos γ pertenece al segundo cuadrante, mientras que $\alpha + \beta$, bien al segundo o bien al tercer cuadrante, es decir, tanto γ como $\alpha + \beta$ pertenecen al segmento $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Por esta razón, como función T es ventajoso tomar otra función trigonométrica que sea monótona en el intervalo indicado. Tal función es, p. ej., el seno. De forma que hallemos sen $(\alpha + \beta)$. Tenemos:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta =$$
$$= \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right) + \cos\frac{\pi}{3}\cdot\sqrt{1-\cos^2\beta} =$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{14} + \frac{4\sqrt{3}}{14} = \frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

Así, pues, $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{3\sqrt{3}}{14}$. Calculemos ahora sen γ. Tenemos:

$$\operatorname{sen}\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \sqrt{1-\left(-\frac{13}{14}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

De modo que hemos obtenido:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\gamma. \tag{10}$$

Como $\alpha + \beta$ y γ pertenecen a un mismo intervalo de monotonía del seno, de la igualdad (10) se desprende que $\alpha + \beta = \gamma$. Así queda demostrada la igualdad (9).

EJEMPLO 7. Demostremos que si $-1 < x < 1$,

$$\operatorname{arcsen} x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{11}$$

DEMOSTRACIÓN. Calculemos los valores de la tangente en ambos miembros de la igualdad (11). Obtenemos

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

es decir, las tangentes son iguales. Seguidamente, $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsen} x < \frac{\pi}{2}$ (las desigualdades son estrictas, ya que, según el planteamiento $-1 < x < 1$) y $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{\pi}{2}$, es decir, arcsen x y arctg x pertenecen al mismo intervalo de monotonía de la tangente. De este modo la identidad (11) queda demostrada.

EJERCICIOS

Calculen:

1323. $2 \operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arcctg}(-1)+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\arccos(-1)$.

1324. $\operatorname{tg}\left(5\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{4}\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1325. $\operatorname{sen}\left(3\operatorname{arctg}\sqrt{3}+2\arccos\frac{1}{2}\right)$.

1326. $\cos\left(3\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

1327. $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)$. 1328. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 0,3\pi)$.

1329. $\operatorname{arcsen}\left(-\operatorname{sen}\frac{7}{3}\pi\right)$. 1330. $\arccos\left(-\cos\frac{3\pi}{4}\right)$.

1331. $\operatorname{arctg}\left(-\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}\right)$. 1332. $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{33\pi}{7}\right)+\arccos\cos\left(-\frac{46\pi}{7}\right)$.

1333. $\operatorname{arctg}\left(-\operatorname{tg}\frac{13\pi}{8}\right)+\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{19\pi}{8}\right)\right)$.

1334. $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right)$. 1335. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{5}{13}\right)$.

1336. $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right)$. 1337. $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arctg}\frac{8}{15}-\operatorname{arcsen}\frac{8}{17}\right)$.

1338. $\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\arccos\frac{3}{5}\right)$.

1339. $\operatorname{sen}\left(2\left(\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{5}}{3}-\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right)$.

Simplifiquen las expresiones:

1340. $\cos(\arccos x+\arccos y)$. 1341. $\operatorname{sen}(\arccos x+\operatorname{arcsen} y)$.
1342. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y)$. 1343. $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x+\operatorname{arcsen} y)$.
1344. $\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen} x)$. 1345. $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} x)$.
1346. $\cos(2\operatorname{arctg} x)$. 1347. $\operatorname{sen}(2\operatorname{arcctg} x)$.
1348. $\cos(2\operatorname{arcctg} x)$. 1349. $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)$.

1350. $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right)$.

Comprueben las siguientes igualdades:

1351. $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}=\frac{\pi}{4}$. 1352. $\operatorname{arcctg}\frac{1}{9}+\operatorname{arcctg}\frac{4}{5}=\frac{3\pi}{4}$.

1353. $\operatorname{arcctg}\frac{1}{7}+2\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}=\frac{5\pi}{4}$.

1354. $\operatorname{arcsen}\frac{4}{5}-\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

1355. $\operatorname{arcsen}\frac{7}{25}+\frac{1}{2}\arccos\frac{7}{25}=\arccos\frac{3}{5}$.

1356. $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{arctg}(3+2\sqrt{2})$.

1357. $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \frac{2}{9} = \frac{\pi}{4}$.

1358. $\operatorname{arcsen} \frac{4}{5} + \operatorname{arcsen} \frac{5}{13} + \operatorname{arcsen} \frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$.

Demuestren las siguientes identidades:

1359. $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcsen} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1360. $\operatorname{arcsen} x = \begin{cases} \arccos \sqrt{1-x^2} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\arccos \sqrt{1-x^2} \text{ si } -1 \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$

1361. $\arccos x = \begin{cases} \operatorname{arcsen} \sqrt{1-x^2} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \pi - \operatorname{arcsen} \sqrt{1-x^2} \text{ si } -1 \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$

1362. $\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ si } x > 0, \\ -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ si } x \leqslant 0. \end{cases}$

1363. $\arccos x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \text{ si } 0 < x \leqslant 1, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \text{ si } -1 \leqslant x < 0. \end{cases}$

1364. $\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} \text{ si } x > 0, \\ \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} - \pi \text{ si } x < 0. \end{cases}$

1365. $\operatorname{arcsen} x = \begin{cases} \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \text{ si } 0 < x \leqslant 1, \\ \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi \text{ si } -1 \leqslant x < 0. \end{cases}$

1366. $\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \operatorname{arcsen} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ si } x \geqslant 0, \\ \pi - \operatorname{arcsen} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ si } x < 0. \end{cases}$

1367. $\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \text{ si } x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \text{ si } x < 0. \end{cases}$

1368. $2 \arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}} = \arccos x$.

1369. $\frac{1}{2} \arccos(2x^2 - 1) = \arccos x$ si $x \geqslant 0$.

§ 3. Demostración de desigualdades

Al demostrar desigualdades trigonométricas se emplean los mismos procedimientos que al demostrar las algebraicas (véase la pág. 33). Sólo hemos de señalar que durante la demostración de desigualdades trigonométricas por método sintético, como de referencia se utilizan con frecuencia las siguientes desigualdades:

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant 1, \quad |\cos x| \leqslant 1, \quad \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x, \text{ donde } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

En ciertas ocasiones como de referencia se emplean las desigualdades que se desprenden de la monotonía de las funciones geométricas. P. ej., en el intervalo $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ las funciones $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{tg} x$ crecen, mientras que las funciones $y = \cos x$ e $y = \operatorname{ctg} x$, decrecen. Por esta razón, si $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{sen} x_1 < \operatorname{sen} x_2$, $\cos x_1 > \cos x_2$, $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$, $\operatorname{ctg} x_1 > \operatorname{ctg} x_2$. Desigualdades análogas pueden ser obtenidas para otros intervalos de monotonía de las funciones trigonométricas.

Examinemos ejemplos.

EJEMPLO 1. Demostremos la desigualdad $a \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{b}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \geqslant 2\sqrt{ab}$ si sabemos que $a > 0$, $b > 0$, $\alpha \neq \pi n$.

DEMOSTRACIÓN. Hagamos uso de la desigualdad que liga la media aritmética y la media proporcional de dos números positivos a_1 y a_2: $\frac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2}$.

Hagamos en esta desigualdad $a \operatorname{sen}^2 \alpha = a_1$, $\frac{b}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = a_2$. Obtenemos:

$$\frac{a \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{b}{\operatorname{sen}^2 \alpha}}{2} \geqslant \sqrt{a \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \frac{b}{\operatorname{sen}^2 \alpha}},$$

de donde $a \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{b}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \geqslant 2\sqrt{ab}$, lo que había que demostrar.

EJEMPLO 2. Demostremos que si A, B, C son los ángulos de un triángulo,

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}. \tag{1}$$

DEMOSTRACIÓN. Realicemos ciertas transformaciones del primer miembro de la desigualdad (1) Tenemos:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \cos C.$$

Como, de acuerdo con el planteamiento, $A+B+C=180°$, entonces $\frac{A+B}{2}=90°-\frac{C}{2}$ y, por lo tanto,

$$\cos\frac{A+B}{2}=\cos\left(90°-\frac{C}{2}\right)=\operatorname{sen}\frac{C}{2}.$$

Como $0\leqslant\cos\frac{A-B}{2}\leqslant 1$, $\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\leqslant\operatorname{sen}\frac{C}{2}$.

Así, pues,

$$2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos C\leqslant 2\operatorname{sen}\frac{C}{2}+\cos C.$$

Analicemos la expresión $2\operatorname{sen}\frac{C}{2}+\cos C$. Tenemos:

$$2\operatorname{sen}\frac{C}{2}+\cos C=2\operatorname{sen}\frac{C}{2}+1-2\operatorname{sen}^2\frac{C}{2}.$$

Hagamos $x=\operatorname{sen}\frac{C}{2}$. Entonces,

$$2\operatorname{sen}\frac{C}{2}+1-2\operatorname{sen}^2\frac{C}{2}=-2x^2+2x+1.$$

Si ahora demostramos que $-2x^2+2x+1\leqslant\frac{3}{2}$, de aquí se desprenderá la validez de la desigualdad (1).

Obtenemos

$$-2x^2+2x+1-\frac{3}{2}\leqslant 0 \quad \text{o bien} \quad 2x^2-2x+\frac{1}{2}\geqslant 0,$$

$$\text{de donde } 4x^2-4x+1\geqslant 0, \text{ es decir, } (2x-1)^2\geqslant 0.$$

Pero esta desigualdad es válida. O sea, para toda x es también válida la desigualdad $-2x^2+2x+1\leqslant\frac{3}{2}$.

Así queda demostrada la desigualdad (1).

EJEMPLO 3. Demostremos la desigualdad

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}2\alpha\operatorname{sen}3\alpha<\frac{3}{4}. \qquad (2)$$

DEMOSTRACIÓN. Realicemos ciertas transformaciones del primer miembro de la desigualdad (2). Tenemos:

$$(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}2\alpha)\operatorname{sen}3\alpha=\frac{\cos\alpha-\cos 3\alpha}{2}\operatorname{sen}3\alpha=$$

$$=\frac{2\operatorname{sen}3\alpha\cos\alpha-2\operatorname{sen}3\alpha\cos 3\alpha}{4}=\frac{\operatorname{sen}4\alpha+\operatorname{sen}2\alpha-\operatorname{sen}6\alpha}{4}.$$

Como $\operatorname{sen}4\alpha\leqslant 1$, $\operatorname{sen}2\alpha\leqslant 1$, $-\operatorname{sen}6\alpha\leqslant 1$, entonces $\operatorname{sen}4\alpha+\operatorname{sen}2\alpha-\operatorname{sen}6\alpha\leqslant 3$, con la particularidad de que el

signo de igualdad tiene lugar sólo para aquellos valores de α que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \operatorname{sen} 4\alpha = 1 \\ \operatorname{sen} 2\alpha = 1 \\ \operatorname{sen} 6\alpha = -1. \end{cases}$$

Pero este sistema no tiene soluciones. En efecto, si $\operatorname{sen} 2\alpha = 1$, $\cos 2\alpha = 0$ y, por lo tanto, $\operatorname{sen} 4\alpha = 2 \operatorname{sen} 2\alpha \cos 2\alpha = 0$.

Así, pues, $\operatorname{sen} 4\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha - \operatorname{sen} 6\alpha < 3$, lo que significa que $\frac{\operatorname{sen} 4\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha - \operatorname{sen} 6\alpha}{4} < \frac{3}{4}$, de donde se desprende la desigualdad (2).

EJEMPLO 4. Demostremos que

$$\operatorname{tg} \alpha_1 < \frac{\operatorname{sen} \alpha_1 + \operatorname{sen} \alpha_2 + \ldots + \operatorname{sen} \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \ldots + \cos \alpha_n} < \operatorname{tg} \alpha_n$$

$$\text{si } 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Como en el intervalo $]0; \frac{\pi}{2}[$ la función $y = \operatorname{sen} x$ crece y la función $y = \cos x$, decrece,

$$0 < \operatorname{sen} \alpha_1 < \operatorname{sen} \alpha_2 < \ldots < \operatorname{sen} \alpha_n,$$

$$\cos \alpha_1 > \cos \alpha_2 > \ldots > \cos \alpha_n > 0.$$

Así, pues, $n \operatorname{sen} \alpha_1 < \operatorname{sen} \alpha_1 + \operatorname{sen} \alpha_2 + \ldots + \operatorname{sen} \alpha_n < n \operatorname{sen} \alpha_n$, $n \cos \alpha_1 > \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \ldots + \cos \alpha_n > n \cos \alpha_n$, de donde

$$\frac{n \operatorname{sen} \alpha_1}{n \cos \alpha_1} < \frac{\operatorname{sen} \alpha_1 + \operatorname{sen} \alpha_2 + \ldots + \operatorname{sen} \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \ldots + \cos \alpha_n} < \frac{n \operatorname{sen} \alpha_n}{n \cos \alpha_n}, \text{ es}$$

$$\text{decir, } \operatorname{tg} \alpha_1 < \frac{\operatorname{sen} \alpha_1 + \operatorname{sen} \alpha_2 + \ldots + \operatorname{sen} \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \ldots + \cos \alpha_n} < \operatorname{tg} \alpha_n,$$

o sea, lo que teníamos que demostrar.

EJEMPLO 5. Demostremos que

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma < 1$$

si $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ y $\alpha + \beta + \gamma < \frac{\pi}{2}$.

DEMOSTRACIÓN. Hagamos $\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta = \gamma_1$. Entonces, $\gamma < \gamma_1$, ya que de acuerdo con el planteamiento, $\gamma < \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta$. Consideremos la expresión $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma_1$. Es posible demostrar (véase la pág. 217) que

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma_1 = 1.$$

Pero γ y γ_1 son argumentos del primer cuadrante, además $\gamma < \gamma_1$. De modo que, $\operatorname{tg}\gamma < \operatorname{tg}\gamma_1$ y, por lo tanto,

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma < \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma_1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma_1,$$

es decir, $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma < 1$, que es lo que queríamos demostrar.

EJEMPLO 6. Demostremos que si α, β, γ son los valores de los ángulos de un triángulo, $(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma)^2 > 9 \operatorname{sen}\alpha \times \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma$.

DEMOSTRACIÓN. Hagamos uso de la desigualdad que liga la media aritmética y la media proporcional de tres números positivos: $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$.

Haciendo en esta desigualdad $\operatorname{sen}\alpha = a$, $\operatorname{sen}\beta = b$, $\operatorname{sen}\gamma = c$, obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma}{3} \geqslant \sqrt[3]{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}$$

y, a continuación, $(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma)^2 \geqslant 9\sqrt[3]{(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma)^2}$, pero $\sqrt[3]{(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma)^2} > \sqrt[3]{(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma)^3} = \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma$.

Así, pues, $(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma)^2 > 9\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma$ que es lo que queríamos demostrar.

EJEMPLO 7. Demostremos la desigualdad

$$\alpha - \frac{\alpha^3}{4} < \operatorname{sen}\alpha, \tag{3}$$

donde $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

DEMOSTRACION. Tomemos como de referencia la desigualdad $\frac{\alpha}{2} < \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ Transformándola consecutivamente, obtenemos:

$$\alpha\cos\frac{\alpha}{2} < 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}, \quad \alpha\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} < 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2} < \operatorname{sen}\alpha, \quad \alpha\left(1 - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right) < \operatorname{sen}\alpha.$$

Ahora, hagamos uso de la desigualdad

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2}. \tag{4}$$

Como, de acuerdo con el planteamiento, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} > 0$ y $\frac{\alpha}{2} > 0$. Por ello, la desigualdad (4) se puede transformar en

$$\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha^2}{4}, \text{ es decir, } 1-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} > 1-\frac{\alpha^2}{4},$$

de donde

$$\alpha\left(1-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right) > \alpha-\frac{\alpha^3}{4}. \qquad (5)$$

Comparando las desigualdades (3) y (5), obtenemos:

$$\alpha-\frac{\alpha^3}{4} < \alpha\left(1-\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right) < \operatorname{sen}\alpha,$$

de donde $\alpha-\frac{\alpha^3}{4} < \operatorname{sen}\alpha$ que es lo que debíamos demostrar.

EJEMPLO 8. Demostremos la desigualdad

$$\operatorname{tg}\alpha-\alpha < \operatorname{tg}\beta-\beta \qquad (6)$$

si $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$.

DEMOSTRACIÓN. Hagamos uso de la desigualdad $\operatorname{tg} x > x$, donde $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Hagamos $x = \beta-\alpha$. Entonces, $\operatorname{tg}(\beta-\alpha) > \beta-\alpha$. Si demostramos que

$$\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}(\beta-\alpha), \qquad (7)$$

quedará demostrada la desigualdad $\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha > \beta-\alpha$ y, por lo tanto, la (6).

Así, pues, vamos a demostrar la desigualdad (7). Para ello componemos la diferencia $(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha)-\operatorname{tg}(\beta-\alpha)$ y la transformemos:

$$\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}(\beta-\alpha) = \operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha-\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} =$$
$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha).$$

La expresión obtenida es positiva, ya que $\operatorname{tg}\beta > \operatorname{tg}\alpha$.

De aquí se deduce la validez de la desigualdad (7) y, por consiguiente, de la (6).

EJEMPLO 9. Demostremos la desigualdad

$$\cos\alpha+3\cos 3\alpha+6\cos 6\alpha \geqslant -7\frac{3}{16}. \qquad (8)$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos lo contrario, es decir, que

$$\cos\alpha+3\cos 3\alpha+6\cos 6\alpha < -7\frac{3}{16}. \qquad (9)$$

Al transformar la desigualdad (9), obtenemos

$$\cos\alpha + 3\cos 3\alpha + 6\cos 6\alpha + 6 < -1\frac{3}{16},$$

$$\cos\alpha + 3\cos 3\alpha + 12\cos^2 3\alpha < -1\frac{3}{16},$$

$$\cos\alpha + 3(\cos 3\alpha + 4\cos^2 3\alpha) < -1\frac{3}{16},$$

$$3\left(4\cos^2 3\alpha + \cos 3\alpha + \frac{1}{16}\right) + \cos\alpha - \frac{3}{16} < -1\frac{3}{16},$$

$$3\left(2\cos 3\alpha + \frac{1}{4}\right)^2 + \cos\alpha < -1. \qquad (10)$$

La desigualdad (10) es falsa, ya que $\left(2\cos 3\alpha + \frac{1}{4}\right)^2 \geqslant 0$ y $\cos\alpha \geqslant -1$. Es decir, nuestra suposición no es cierta, o sea, es válida la desigualdad (8).

EJEMPLO 10. Demostremos la desigualdad

$$\cos 36° > \operatorname{tg} 36°. \qquad (11)$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la desigualdad (11) no es cierta, es decir, $\cos 36° \leqslant \operatorname{tg} 36°$.

Entonces, consecutivamente, obtenemos:

$$\cos 36° \leqslant \frac{\operatorname{sen} 36°}{\cos 36°},$$

$$\cos^2 36° \leqslant \operatorname{sen} 36°,$$

$$1 + \cos 72° \leqslant 2\operatorname{sen} 36°,$$

$$1 + \cos(90° - 18°) \leqslant 2\operatorname{sen}(6° + 30°),$$

$$1 + \operatorname{sen} 18° \leqslant 2\operatorname{sen} 6°\cos 30° + 2\operatorname{sen} 30°\cos 6°,$$

$$1 + 2\operatorname{sen} 9°\cos 9° \leqslant \cos 6° + 2\operatorname{sen} 6°\cos 30°. \qquad (12)$$

Como $1 > \cos 6°$, $\operatorname{sen} 9° > \operatorname{sen} 6°$, $\cos 9° > \cos 30°$, la desigualdad (12) es falsa. Así, pues, es cierta la desigualdad (11).

EJEMPLO 11. Demostremos que si A, B, C son los ángulos de un triángulo,

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}. \qquad (13)$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que (13) es falsa, o sea, que $\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2} > \frac{1}{8}$.

Entonces, después de transformar el producto sen $\frac{A}{2}$ sen $\frac{B}{2}$ en la semidiferencia de los cosenos, obtenemos:

$$\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{C}{2}>\frac{1}{4}$$

y, a continuación,

$$\cos\frac{A-B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}>\frac{1}{4},$$

$$\operatorname{sen}\frac{A-B+C}{2}+\operatorname{sen}\frac{-A+B+C}{2}-\operatorname{sen}\frac{A+B+C}{2}+$$
$$+\operatorname{sen}\frac{A+B-C}{2}>\frac{1}{2}. \qquad (14)$$

Como $A+B+C=180°$, $A-B+C=180°-2B$, $-A+B+C=180°-2A$, $A+B-C=180°-2C$ y, por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\frac{A+B-C}{2}=\cos B,\quad \operatorname{sen}\frac{C-A+B}{2}=\cos A,$$
$$\operatorname{sen}\frac{A+B+C}{2}=1,\quad \operatorname{sen}\frac{A+B-C}{2}=\cos C.$$

Esto nos permite escribir la desigualdad (14) del modo siguiente:

$$\cos B+\cos A-1+\cos C>\frac{1}{2}$$

$$\text{o bien}\ \cos A+\cos B+\cos C\geqslant\frac{3}{2}.$$

Pero esto contradice la igualdad demostrada en el ejemplo 2 (véase la pág. 231). Esto significa que nuestra suposición no es cierta, es decir, es válida la desigualdad (13).

EJEMPLO 12. Demostremos la desigualdad

$$\operatorname{tg} n\alpha>n\operatorname{tg}\alpha \qquad (15)$$

$$\text{si}\ 0<\alpha<\frac{\pi}{4(n-1)},\ n\ \text{es un número natural},\ n\neq 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Empleemos el método de inducción matemática.

1) Comprobemos la validez de (15) con $n=2$, es decir, demostremos que

$$\operatorname{tg} 2\alpha>2\operatorname{tg}\alpha, \qquad (16)$$

donde $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

En efecto, $\operatorname{tg} 2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}-2\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}\alpha\,\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Con $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ tenemos $\operatorname{tg}\alpha > 0$, $1 - \operatorname{tg}^2\alpha > 0$, o sea

$$2\operatorname{tg}\alpha \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} > 0.$$

De aquí se desprende la validez de (16).

2) Supongamos que la desigualdad (15) es válida con $n = k$, es decir, $\operatorname{tg} k\alpha > k \operatorname{tg}\alpha$, donde $0 < \alpha < \frac{\pi}{4(k-1)}$. Demostremos que, entonces, la desigualdad (15) es válida, asimismo, con $n = k + 1$, es decir,

$$\operatorname{tg}(k+1)\alpha > (k+1)\operatorname{tg}\alpha, \qquad (17)$$

donde $0 < \alpha < \frac{\pi}{4k}$. En efecto,

$$\operatorname{tg}(k+1)\alpha = \frac{\operatorname{tg} k\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} k\alpha \operatorname{tg}\alpha} > \frac{k\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} k\alpha \operatorname{tg}\alpha}.$$

Según el planteamiento $0 < \alpha < \frac{\pi}{4k}$, es decir, $\operatorname{tg} k\alpha < \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ y $\operatorname{tg}\alpha < 1$. Pero, entonces, $\frac{k\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} k\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha} > (k+1)\operatorname{tg}\alpha$, de donde se desprende la validez de la desigualdad (17).

De acuerdo con el principio de la inducción matemática llegamos a la conclusión de que (15) es cierta para toda $n \geqslant 2$ natural.

EJERCICIOS

Demuestren las siguientes desigualdades:

1370. $\sqrt{\cos\varphi} \leqslant \sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}$ si $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

1371. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \geqslant 1 + \operatorname{ctg}\alpha$ si $0 < \alpha < \pi$.

1372. $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta < 1$ si α, β son los valores de los ángulos agudos de un triángulo obtusángulo.

1373. $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta > 1$ si α, β son los valores de los ángulos de un triángulo acutángulo.

1374. $\cos\alpha + \cos\beta > \cos\gamma$ si $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

1375. $\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2\gamma \leqslant 2$ si α, β, γ son los valores de los ángulos de un triángulo no acutángulo.

1376. $\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2\gamma > 2$ si α, β, γ son los valores de los ángulos de un triángulo acutángulo.

1377. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geqslant 1$ si α, β, γ son los valores de los ángulos de un triángulo no acutángulo.

1378. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma < 1$ si α, β, γ son los valores de los ángulos de un triángulo acutángulo.

1379. $\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2} \geqslant \frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}{2}$ si $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

1380. $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\geqslant\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2}$ si $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

1381. $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\leqslant\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2}$ si $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

1382. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\cos\alpha\right)>0$. 1383. $\operatorname{sen}^4\alpha+\cos^4\alpha\geqslant\frac{1}{2}$.

1384. $\operatorname{sen}^6\alpha+\cos^6\alpha\geqslant\frac{1}{4}$. 1385. $\operatorname{sen}^8\alpha+\cos^8\alpha\geqslant\frac{1}{8}$.

1386. $\operatorname{sen}^{2n}\alpha+\cos^{2n}\alpha\leqslant 1$.

1387. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)>\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$ si $\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$.

1388. $\operatorname{sen}^4 x-6\operatorname{sen}^2 x+5>0$.

1389. $\cos(\operatorname{sen} x)>0$. 1390. $\operatorname{sen}(2+\cos x)>0$.

1391. $\cos(\pi+\operatorname{arcsen} x)\leqslant 0$. 1392. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} x\right)>0$.

1393. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha\geqslant 2$ si $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

1394. $-\sqrt{2}\leqslant\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha\leqslant\sqrt{2}$.

1395. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha>\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha$ si $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

1396. $|\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha|>|\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha|$.

1397. $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\leqslant\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta$, si $0<\alpha<\pi$, $0<\beta<\pi$.

1398. $\cos(\alpha-\beta)\leqslant\cos\alpha+\operatorname{sen}\beta$, si $0<\alpha<\pi$, $0<\beta<\pi$.

1399. $\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)<\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma$ si

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2},\ 0<\gamma<\frac{\pi}{2}.$$

1400. $\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}>0$ si $\alpha\neq\frac{\pi k}{2}$.

1401. $\frac{3}{(1+\operatorname{sen}^2\alpha)(1+\cos^2\alpha)}<2+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$ si $\alpha\neq\frac{\pi k}{2}$.

1402. $3(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha)-8(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)+10\geqslant 0$.

1403. $\frac{\operatorname{sen}\alpha-1}{\operatorname{sen}\alpha-2}+\frac{1}{2}\geqslant\frac{2-\operatorname{sen}\alpha}{3-\operatorname{sen}\alpha}$.

1404. $(1+\operatorname{sen}^2\alpha)(\operatorname{tg}^2\alpha-2)+\operatorname{ctg}^2\alpha+\cos^2\alpha\geqslant 0$.

1405. $\operatorname{sen}2\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha\leqslant\frac{1}{16}$.

1406. $\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cdot\ \ldots\ \cdot\cos 2^n\alpha\leqslant\frac{1}{2^{n+1}\operatorname{sen}\alpha}$ si $0<\alpha<\pi$.

1407. $-\frac{1}{4}\leqslant\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\leqslant\frac{1}{4}$.

1408. $0\leqslant\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)\leqslant 1$.

1409. $\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)+\operatorname{tg}\beta(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\gamma)+\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)\geqslant 6,$

$\text{si } 0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2},\ 0<\gamma<\frac{\pi}{2}.$

1410. $(\operatorname{ctg}^2\alpha-1)(3\operatorname{ctg}^2\alpha-1)(\operatorname{ctg}3\alpha\operatorname{tg}2\alpha-1)\leqslant -1.$

1411. $(1-\operatorname{tg}^2\alpha)(1-3\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}3\alpha)>0.$

1412. $\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}^2\beta\geqslant\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta-1.$

1413. $\alpha-\operatorname{sen}\alpha<\beta-\operatorname{sen}\beta \text{ si } 0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}.$

1414. $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}>\frac{\operatorname{sen}\beta}{\beta} \text{ si } 0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}.$

1415. $\cos\alpha+2\operatorname{sen}\alpha>1 \text{ si } 0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}.$

1416. $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}>\frac{\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \text{ si } 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$

1417. $\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{2}>\alpha \text{ si } 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$

1418. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}<\alpha \text{ si } 0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}.$

1419. $\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}2\alpha+\ldots+\operatorname{sen}n\alpha<n.$

1420. $\frac{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}3\alpha+\ldots+\operatorname{sen}(2n-1)\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\geqslant 0.$

1421. $(1-\operatorname{sen}\alpha)^2+\operatorname{sen}^2(\alpha-1)>0.$ 1422. $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}<2.$

1423. $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\leqslant\cos^2\alpha.$ 1424. $\frac{1}{\operatorname{sen}^4\alpha}+\frac{1}{\cos^4\alpha}\geqslant 8.$

1425. $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma\geqslant 1 \text{ si } \alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0,\ \alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}.$

1426. $\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}^2\beta+\operatorname{sen}^2\gamma\geqslant\frac{3}{4} \text{ si } \alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0,\ \alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}.$

1427. $4\operatorname{sen}3\alpha+5\geqslant 4\cos 2\alpha+5\operatorname{sen}\alpha.$

1428. $|\operatorname{sen}n\alpha|\leqslant n\,|\operatorname{sen}\alpha|.$

1429. $\cos\alpha\leqslant\cos^{2n}\frac{\alpha}{2^n} \text{ si } 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$

1430. $\left(1+\frac{1}{\operatorname{sen}^n\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos^n\alpha}\right)\geqslant\left(1+2^{\frac{n}{2}}\right)^2 \text{ si } 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$

1431. $\cos 2\gamma\leqslant 0 \text{ si } \operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$

Capítulo II

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES Y DESIGUALDADES

§ 4. Ecuaciones

Recordemos las fórmulas generales para resolver las más sencillas ecuaciones trigonométricas (si no hay restricciones, suponemos que los parámetros n, k, l, m . . . toman cualesquiera valores).

Ecuación	Solución
$\operatorname{sen} x = a$, donde $\mid a \mid \leqslant 1$	$x = (-1)^k \operatorname{arcsen} a + \pi k$
$\cos x = a$, donde $\mid a \mid \leqslant 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi k$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$

Especialmente, señalemos algunos casos particulares de las ecuaciones trigonométricas más sencillas, cuando la solución se puede escribir sin emplear las fórmulas generales:

$$\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k,$$

$$\operatorname{sen} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$\operatorname{sen} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k.$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi k,$$

$$\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k.$$

La verificación de las soluciones, es necesaria:

1) si en el proceso de la resolución, debido a ciertas transformaciones (eliminación de denominadores, simplificación de fracciones, reducción de términos semejantes), se produjo la ampliación del campo de definición de la ecuación *,

2) si en el proceso de resolución de la ecuación se empleó la elevación de ambos miembros de la ecuación a una misma potencia par,

3) si durante la resolución se utilizaron identidades trigonométricas, cuyos miembros primero y segundo tienen distintos campos de definición, p. ej.,

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{sen}\alpha,\quad \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\cos\alpha,\quad \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1,\quad \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\quad \operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\ \text{etc.}$$

El empleo de estas identidades «de izquierda a derecha» conduce a la ampliación del campo de definición de la ecuación, es decir, puede conducir a la aparición de raíces extrañas; la utilización de estas identidades «de derecha a izquierda» nos lleva a la contracción del campo de definición, lo que, en general no es tolerable, ya que esto puede conducir a la pérdida de raíces.

Como ejemplo consideremos la ecuación

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\operatorname{ctg}x-1. \tag{1}$$

Tenemos:

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}x+1}{1-\operatorname{tg}x}, \tag{2}$$

$$\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x}. \tag{3}$$

Entonces, la ecuación (1) se transforma a la forma

$$\frac{\operatorname{tg}x+1}{1-\operatorname{tg}x}=\frac{2}{\operatorname{tg}x}-1.$$

Haciendo $y=\operatorname{tg}x$, obtenemos: $\frac{y+1}{1-y}=\frac{2}{y}-1$, de donde hallamos $y=\frac{1}{2}$ es decir, $\operatorname{tg}x=\frac{1}{2}$ y, por lo tanto, $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$.

Esta familia satisface la ecuación (1). No obstante, es fácil advertir que el valor $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ también satisface la ecuacion (1).

---

* Por campo de definición de la ecuación $f(x)=g(x)$ se entiende la intersección de los campos de definición de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

La causa de la pérdida de las soluciones es la aplicación de las identidades (2) y (3). La sustitución de $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ por $\frac{\operatorname{tg} x+1}{1-\operatorname{tg} x}$, lo mismo que la sustitución de $\operatorname{ctg} x$ por $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$, contraen el campo de definición de la ecuación (1) y, precisamente, del campo de definición "desaparecen" los valores de $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$. En este caso, son ellos las soluciones de la ecuación (1) que se "perdieron".

Al resolver ecuaciones trigonométricas se emplean dos métodos fundamentales: 1) la descomposición en factores (véase la pág. 55); 2) la introducción de nuevas variables.

Cuando las ecuaciones se resuelven por el método de introducción de nuevas variables, hay que tener en cuenta que la función a través de la cual se expresan las demás funciones, desempeña un importante papel. Puede suceder que una elección de tal función proporciona una ecuación irracional, otra, racional. Es evidente que la segunda elección es preferible. P. ej., si en la ecuación $2 \cos^2 x + 4 \cos x = 3 \operatorname{sen}^2 x$ hacemos $y = \operatorname{sen} x$, se obtendrá un conjunto de dos ecuaciones irracionales:

$$2(1-y^2)+4\sqrt{1-y^2}=3y^2;\ \ 2(1-y^2)-4\sqrt{1-y^2}=3y^2.$$

Pero si hacemos $y = \cos x$, obtenemos una ecuación racional: $2y^2 + 4y = 3(1 - y^2)$.

Vamos a designar con $R(\cos x, \operatorname{sen} x)$ una expresión racional de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$, es decir, una expresión constituida por $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ y constantes con ayuda de la adición, multiplicación y división.

Consideremos la ecuación de la forma: $R(\cos x, \operatorname{sen} x) = 0$. En algunos casos semejante ecuación puede ser reducida a una ecuación racional con relación a $\operatorname{sen} x$ (o bien respecto a $\cos x$). Indiquemos ciertas reglas que facilitan la elección de la sustitución al resolver ecuaciones trigonométricas. Si $\cos x$ entra en la ecuación sólo con exponentes pares, sustituyendo por doquier $\cos^2 x$ por $1 - \operatorname{sen}^2 x$ se obtiene una ecuación racional con relación a $\operatorname{sen} x$. Del mismo modo, si $\operatorname{sen} x$ entra en la ecuación sólo con exponentes pares, la sustitución de $\operatorname{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$ conduce a que la ecuación sea de la forma racional con relación a $\cos x$.

Recibe el nombre de *ecuación homogénea trigonométrica de 1-er grado* de la forma

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = 0.$$

Recibe el nombre de *ecuación homogénea de 2-do grado* la de la forma

$$a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x \cos x + c \cos^2 x = 0.$$

De modo análogo es posible definir una ecuación homogénea trigonométrica de cualquier grado natural n.

Consideremos el caso cuando $a \neq 0$. Es fácil advertir que con $a \neq 0$, aquellos valores de x con los que $\cos x = 0$ no satisfacen la ecuación homogénea. Por ello, la división por $\cos x$ (por $\cos^2 x$) de ambos miembros de la ecuación homogénea de 1-er (2-do grado) conduce a una ecuación equivalente cuando $a \neq 0$. Dividamos ambos miembros de una ecuación homogénea de 1-er grado por $\cos x$ y los dos miembros de una ecuación homogénea de 2 do grado por $\cos^2 x$. Como resultado obtenemos, respectivamente, las siguientes ecuaciones racionales con relación a $\operatorname{tg} x$ y, por lo tanto, que se resuelven sustituyendo $z = \operatorname{tg} x$:

$$a \operatorname{tg} x + b = 0, \ a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0.$$

Consideremos ahora la sustitución que permite reducir a una ecuación equivalente cualquier ecuación de la forma $R(\cos x, \operatorname{sen} x) = 0$. Esta sustitución es $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Si $x \neq \pi + 2\pi k$, es válida la identidad

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Por ello, la sustitución $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ transforma $R(\cos x \operatorname{sen} x) = 0$ en la ecuación

$$R\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right) = 0.$$

El primer miembro de la última ecuación es una expresión racional. Así, pues, nuestra sustitución ha conducido la ecuación a la forma racional. La sustitución $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ lleva el nombre de *universal*. Como el empleo de la sustitución universal sólo es posible con $x \neq \pi + 2\pi k$, es preciso comprobar si los números de la forma $x = \pi + 2\pi k$ son las soluciones de la ecuación prefijada.

En el presente apartado, además de las ecuaciones trigonométricas de una variable, se estudian ecuaciones de dos y tres variables, así como ecuaciones que contienen la variable bajo el signo de la función trigonométrica inversa.

Examinemos ejemplos.

EJEMPLO 1. Resolvamos la ecuación $\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen}^2 x = 1$.

SOLUCIÓN. Como $\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} 3x \cos 2x$, $2 \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos 2x$, la ecuación toma la forma:

$$2 \operatorname{sen} 3x \cos 2x + 1 - \cos 2x = 1$$

y, a continuación, $\cos 2x (2 \operatorname{sen} 3x - 1) = 0$.

El problema se ha reducido a la resolución del conjunto de ecuaciones: $\cos 2x = 0$; $2 \operatorname{sen} 3x - 1 = 0$.

De estas ecuaciones hallamos dos familias de soluciones

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k; \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}.$$

EJEMPLO 2. Resolvamos la ecuación $\cos 15x = \operatorname{sen} 5x$

SOLUCIÓN. Como $\cos 15x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 15x\right)$, escribamos la ecuación de la forma siguiente:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 15x\right) - \operatorname{sen} 5x = 0.$$

De aquí $2 \operatorname{sen}\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(10x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Por consiguiente, $\operatorname{sen}\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$; $\cos\left(10x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

De la primera ecuación del conjunto obtenemos $5x + \frac{\pi}{4} = \pi k$, de donde $x = -\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5} k$; de la segunda ecuación del conjunto obtenemos $10x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, de donde $x = \frac{\pi}{40} + \frac{\pi}{10} n$.

EJEMPLO 3. Resolvamos la ecuación $\cos 4x \cos 8x - \cos 5x \times \times \cos 9x = 0$.

SOLUCIÓN. Transformemos los productos de cosenos en sus sumas

$$\frac{\cos 12x + \cos 4x}{2} - \frac{\cos 14x + \cos 4x}{2} = 0,$$

y, a continuación,

$$\frac{1}{2}(\cos 12x - \cos 14x) = 0,$$

de donde $\operatorname{sen} 13x \cdot \operatorname{sen} x = 0$.

Ahora, el problema se reduce a resolver un conjunto de ecuaciones: $\operatorname{sen} 13x = 0$; $\operatorname{sen} x = 0$, del que hallamos dos familias de soluciones de la ecuación inicial: $x = \frac{\pi}{13} k$; $x = \pi n$.

Pero el conjunto $\left\{\frac{\pi}{13} k\right\}$ contiene el conjunto $\{\pi n\}$ (es suficiente hacer $k = 13n$). Por ello, el resultado puede ser escrito de forma más breve: $x = \frac{\pi}{13} k$.

EJEMPLO 4. Resolvamos la ecuación

$$\operatorname{sen} x + 7 \cos x = 5. \qquad (4)$$

SOLUCIÓN. *1-er procedimiento.* Dividiendo ambas partes de la ecuación (4) por $\sqrt{1^2+7^2}=\sqrt{50}$, obtenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{50}}\operatorname{sen} x+\frac{7}{\sqrt{50}}\cos x=\frac{5}{\sqrt{50}}. \qquad (5)$$

Como $\left(\frac{1}{\sqrt{50}}\right)^2+\left(\frac{7}{\sqrt{50}}\right)^2=1$, existe tal valor de φ que $\frac{1}{\sqrt{50}}=\operatorname{sen}\varphi$, $\frac{7}{\sqrt{50}}=\cos\varphi$, donde $\varphi=\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{50}}$ es el ángulo auxiliar $\left(\text{o bien } \varphi=\arccos\frac{7}{\sqrt{50}}\right)$. Ahora, la ecuación (5) se puede escribir del siguiente modo:

$$\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen} x+\cos x\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{o bien} \quad \cos(x-\varphi)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

de donde $x-\varphi=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$.

Como $\varphi=\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{50}}$, definitivamente obtenemos las siguientes soluciones de la ecuación (4):

$$x=\pm\frac{\pi}{4}+\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{50}}+2\pi k$$

$$\left(\text{o bien } x=\pm\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{7}{\sqrt{50}}+2\pi k\right).$$

2-do procedimento. Resolvamos la ecuación (4) con ayuda de la sustitución universal. Expresando $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ por $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ y haciendo $u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, llegamos a la ecuación racional

$$\frac{2u}{1+u^2}+\frac{7(1-u^2)}{1+u^2}=5$$

que, después de resolverla, nos proporciona: $u_1=\frac{1}{2}$, $u_2=-\frac{1}{3}$.

Ahora, hemos de resolver el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}; \quad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=-\frac{1}{3}.$$

De estas ecuaciones, hallamos:

$$x=2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi k; \quad x=2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)+2\pi n.$$

La verificación nos muestra que el valor de $x=\pi+2\pi m$ no satisface la ecuación (4) (acerca de la necesidad de comprobar estos valores al emplear la sustitución universal ya hablamos más arriba).

Así, pues, la ecuación (4) tiene las siguientes soluciones:

$$x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2\pi k; \quad x = -2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n.$$

EJEMPLO 5. Resolvamos la ecuación

$$5 \operatorname{sen} x - 12 \cos x = -13 \operatorname{sen} 3x. \qquad (6)$$

SOLUCIÓN. Como en el ejemplo 4, empleemos el método de introducción de un ángulo auxiliar. Dividiendo ambos miembros de la ecuación (6) por $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, obtenemos:

$$\frac{5}{13} \operatorname{sen} x - \frac{12}{15} \cos x = -\operatorname{sen} 3x. \qquad (7)$$

Como $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$, existe tal valor de φ que $\frac{5}{13} = \cos \varphi$ y $\frac{12}{13} = \operatorname{sen} \varphi$ $\left(\text{o bien } \frac{5}{13} = \operatorname{sen} \varphi \text{ y } \frac{12}{13} = \cos \varphi\right)$.
Ahora, la ecuación (17) puede escribirse del siguiente modo:

$$\operatorname{sen} x \cos \varphi - \cos x \operatorname{sen} \varphi = -\operatorname{sen} 3x$$

y, a continuación,

$$\operatorname{sen} (x - \varphi) + \operatorname{sen} 3x = 0,$$

$$2 \operatorname{sen} \left(2x - \frac{\varphi}{2}\right) \cos \left(x + \frac{\varphi}{2}\right) = 0.$$

Después de resolver el conjunto de ecuaciones

$$\operatorname{sen} \left(2x - \frac{\varphi}{2}\right) = 0; \quad \cos \left(x + \frac{\varphi}{2}\right) = 0,$$

obtenemos: $x = \frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{2} k$; $x = -\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Teniendo en cuenta que $\varphi = \operatorname{arcsen} \frac{12}{13}$, obtenemos las dos siguientes familias de soluciones de la ecuación (6):

$$x = \frac{1}{4} \operatorname{arcsen} \frac{12}{13} + \frac{\pi}{2} k; \quad x = -\frac{1}{2} \operatorname{arcsen} \frac{12}{13} + \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

EJEMPLO 6. Resolvamos la ecuación

$$\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} \frac{2x + \pi}{3}} = 0. \qquad (8)$$

SOLUCIÓN. Como la fracción es igual a cero, de la ecuación se desprende que $\operatorname{sen} 2x = 0$, de donde $x = \frac{\pi}{2} k$. De las soluciones halladas sólo satisfacen la ecuación inicial aquellas y sólo aquellas soluciones que pertenecen al campo de definición de la ecuación dada

El campo de definición de (8) se prefija con la condición sen $\frac{2x+\pi}{3} \neq$ $\neq 0$,

$$\text{de donde } x \neq \frac{3\pi n - \pi}{2}. \qquad (9)$$

Marquemos las soluciones halladas $\left(x = \frac{\pi}{2} k\right)$ con puntos en la recta numérica (fig. 37) y tachemos los puntos que se eliminan debido

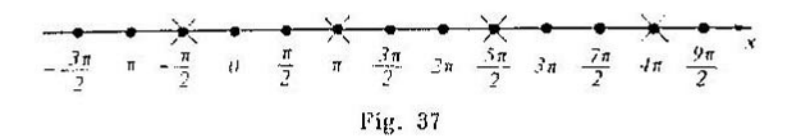


Fig. 37

a la condición (9). Como resultado, obtenemos las siguientes soluciones de (8):

$$x = \frac{3\pi}{2} l; \quad x = \frac{\pi}{2}(3m+1).$$

Estas dos familias de soluciones pueden ser escritas con mayor brevedad: $x = \frac{\pi}{2} l$, donde $l \neq 3m - 1$ y $m \in Z$.

EJEMPLO 7. Resolvamos la ecuación

$$8 \text{ sen } x - 7 \cos x = 0. \qquad (10)$$

SOLUCIÓN. La ecuación (10) es homogénea de 1-er grado. Dividamos ambos miembros de la ecuación por cos x (esta transformación no conducirá a la pérdida de raíces, véase la pág. 244):

$$8 \operatorname{tg} x - 7 = 0, \text{ de donde } x = \operatorname{arctg} \frac{7}{8} + \pi k.$$

EJEMPLO 8. Resolvamos la ecuación

$$\text{sen}^2 x + 2 \text{ sen } x \cos x - 3 \cos^2 x = 0.$$

SOLUCIÓN. Dividiendo ambos miembros de esta ecuación homogénea de 2-do grado por $\cos^2 x$ (con ello no habrá pérdida de raíces, véase la pág. 244), obtenemos: $\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$.

Haciendo $u = \operatorname{tg} x$, llegamos a la ecuación cuadrática $u^2 + 2u - 3 = 0$, de la que hallamos: $u_1 = -3$, $u_2 = 1$.

Resolviendo el conjunto de ecuaciones $\operatorname{tg} x = -3$; $\operatorname{tg} x = 1$, obtenemos:

$$x = \operatorname{arctg}(-3) + \pi k; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n.$$

EJEMPLO 9. Resolvamos la ecuación

$$5 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x \cos x - 3 \cos^2 x = 2.$$

SOLUCIÓN. Esta ecuación no es homogénea, ya que el segundo miembro es distinto de cero. No obstante, puede ser transformada a una ecuación homogénea. Con este fin, empleamos la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Entonces, la ecuación puede ser escrita de la siguiente forma:

$$5 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x \cos x - 3 \cos^2 x = 2 (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)$$

y, a continuación,

$$3 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x \cos x - 5 \cos^2 x = 0.$$

Esta última ecuación es homogénea de 2-do grado. Dividiéndola por $\cos^2 x$ y haciendo uso de la sustitución $u = \operatorname{tg} x$, obtenemos: $x = \operatorname{arctg} \frac{-3 \pm \sqrt{69}}{6} + \pi k$.

EJEMPLO 10. Resolvamos la ecuación

$$5 \operatorname{sen}^2 x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x + 6 \cos^2 x = 5.$$

SOLUCIÓN. Tenemos:

$$5 \operatorname{sen}^2 x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x + 6 \cos^2 x = 5 (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x),$$

$$\sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x = 0. \qquad (11)$$

En la ecuación obtenida falta el término $a \operatorname{sen}^2 x$, es decir, $a = 0$.

Aquí ya no podemos dividir ambos miembros de la ecuación por $\cos^2 x$, ya que aquellos valores de x con los que $\cos^2 x = 0$ satisfacen la ecuación (11) y, por lo tanto, la división por $\cos^2 x$ conducirá a la pérdida de raíces. Operaremos de otro modo: descompongamos el primer miembro de (11) en factores. Obtenemos: $\cos x (\sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x) = 0$.

Ahora, el problema se reduce a resolver un conjunto de ecuaciones:

$$\cos x = 0, \quad \sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x = 0. \qquad (12)$$

De la primera ecuación del conjunto (12) hallamos: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

Dividiendo ambos miembros de la segunda ecuación de (12) por $\cos x$, obtenemos: $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, de donde $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$.

Así, pues, hemos hallado dos familias de soluciones de (11):

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad x = -\frac{\pi}{6} + \pi n.$$

EJEMPLO 11. Resolvamos la ecuación

$$2\cos^2 x + 4\cos x = 3\,\mathrm{sen}^2\,x. \qquad (13)$$

SOLUCIÓN. En la ecuación (13) sen x entra sólo con exponente par, por lo que es conveniente sustituir $\mathrm{sen}^2\,x$ por $1 - \cos^2 x$ y, seguidamente, hacer $u = \cos x$. Entonces, (13) toma la forma:

$$5u^2 + 4u - 3 = 0,$$

de donde $u_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{19}}{5}$.

Nos queda resolver el conjunto de ecuaciones:

$$\cos x = \frac{-2-\sqrt{19}}{5}; \quad \cos x = \frac{-2+\sqrt{19}}{5}.$$

La primera ecuación de este conjunto no tiene soluciones, ya que $\left|\frac{-2-\sqrt{19}}{5}\right| > 1$, mientras que de la segunda ecuación, hallamos: $x = \pm \arccos\frac{-2+\sqrt{19}}{5} + 2\pi k$ es la solución de la ecuación (13).

EJEMPLO 12. Resolvamos la ecuación

$$\mathrm{sen}\,2x + 5\,\mathrm{sen}\,x + 5\cos x + 1 = 0.$$

SOLUCIÓN. Hagamos $u = \mathrm{sen}\,x + \cos x$, entonces

$$u^2 = (\mathrm{sen}\,x + \cos x)^2 \text{ o bien } u^2 = 1 + \mathrm{sen}\,2x.$$

Por esta razón, la ecuación prefijada toma la forma: $u^2 + 5u = 0$, de donde $u_1 = 0$, $u_2 = -5$.

Ahora, el problema se ha reducido a resolver un conjunto de ecuaciones: $\mathrm{sen}\,x + \cos x = 0$; $\mathrm{sen}\,x + \cos x = -5$. La primera ecuación del conjunto (homogénea de 1-er grado), después de dividir ambos miembros por $\cos x$, se transforma a la forma $\mathrm{tg}\,x + 1 = 0$, de donde $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$. La segunda ecuación del conjunto no tiene soluciones, ya que $|\mathrm{sen}\,x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$ y, por lo tanto, la suma $\mathrm{sen}\,x + \cos x$ no puede equivaler al número -5.

Así, pues, la ecuación inicial tiene la siguiente solución: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$.

EJEMPLO 13. Resolvamos la ecuación

$$3\,\mathrm{tg}\,2x - 4\,\mathrm{tg}\,3x = \mathrm{tg}^2\,3x\,\mathrm{tg}\,2x. \qquad (14)$$

SOLUCIÓN. Transformemos la ecuación (14) a la forma:

$$3\,\mathrm{tg}\,2x - 3\,\mathrm{tg}\,3x = \mathrm{tg}\,3x + \mathrm{tg}^2\,3x\,\mathrm{tg}\,2x$$

y, a continuación,

$$3\,(\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x) = \operatorname{tg} 3x\,(1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x). \tag{15}$$

Dividiendo ambos miembros de (15) por $1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x$, obtenemos:

$$3\,\frac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x}{1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x} = \operatorname{tg} 3x \tag{16}$$

o bien

$$-3 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x \tag{16'}$$

y, seguidamente, $\frac{3 \operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{\cos 3x} = 0$,

$$\operatorname{sen} 3x \cos x + 3 \operatorname{sen} x \cos 3x = 0,$$

$$(\operatorname{sen} 3x \cos x + \operatorname{sen} x \cos 3x) + 2 \operatorname{sen} x \cos 3x = 0,$$

$$\operatorname{sen} 4x + (\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x) = 0,$$

$$4 \operatorname{sen} 2x \cos 2x - \operatorname{sen} 2x = 0,$$

$$\operatorname{sen} 2x\,(4 \cos 2x - 1) = 0,$$

$$\operatorname{sen} 2x = 0; \quad \cos 2x = \frac{1}{4},$$

$$x = \frac{\pi}{2} k; \quad x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4} + \pi n.$$

VERIFICACIÓN. Es evidente que las ecuaciones (14) y (15) son equivalentes. Aclaremos si fue equivalente la transformación al pasar de la ecuación (15) a la (16). Con este fin, hallemos aquellos valores de x con los que la expresión $1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x$ se reduce a cero. Tenemos:

$$1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x = 0, \tag{17}$$

$$\frac{\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x}{\cos 3x \cos 2x} + 1 = 0,$$

$$\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x + \cos 3x \cos 2x = 0,$$

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi l.$$

Estos valores de x no satisfacen la ecuación (17) (con ellos no está definida $\operatorname{tg} 3x$). Es decir, la ecuación (17) no tiene soluciones, por lo que la expresión $1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x$ es distinta de cero con cualquier valor tolerable de x. Pero, entonces, la división por $1 + \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x$ de ambos miembros de (15) fue una transformación equivalente.

Las demás transformaciones aplicadas al resolver la ecuación (14) sólo hubieran podido conducir a la aparición de soluciones extrañas (a cuenta de la ampliación del campo de definición de la ecuación

al eliminar los denominadores o por haber aplicado la fórmula (VI. 3) al pasar de la ecuación (16) a la (16'). El «cribado» de las soluciones extrañas ha de realizarse con ayuda del campo de definición de la ecuación (14) que se determina por las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0. \end{cases}$$

De la familia $x = \frac{\pi}{2}k$ será necesario eliminar las soluciones obtenidas con k impares; la segunda familia satisface las indicadas condiciones. Así, pues, la solución de (14) tiene la forma:

$$x = \pi m; \quad x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4} + \pi n.$$

EJEMPLO 15. Resolvamos la ecuación

$$\operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} 2x = 3 + \operatorname{sen} 3x. \tag{18}$$

SOLUCIÓN. Transformemos la ecuación (18) a la forma:

$$(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x) + 2 \operatorname{sen} 2x = 3$$

y, a continuación, $2 \operatorname{sen} x \cos 2x - 2 \operatorname{sen} 2x + 3 = 0$.

Completemos los productos dobles que tenemos $2 \operatorname{sen} x \cos 2x$ y $2 \operatorname{sen} 2x$ hasta los cuadrados perfectos:

$$\begin{aligned} &(\operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos 2x + \cos^2 2x) + \\ &+ (\operatorname{sen}^2 2x - 2 \operatorname{sen} 2x + 1) + 3 = \\ &= \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 2x + \operatorname{sen}^2 2x + 1, \end{aligned}$$

es decir,

$$(\operatorname{sen} x + \cos 2x)^2 + (\operatorname{sen} 2x - 1)^2 + 3 = \operatorname{sen}^2 x + 2,$$

de donde

$$(\operatorname{sen} x + \cos 2x)^2 + (\operatorname{sen} 2x - 1)^2 + \cos^2 x = 0. \tag{19}$$

Pero la suma de los cuadrados es igual a cero cuando, y sólo cuando, cada sumando es igual a cero. Por ello, la ecuación (19) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos 2x = 0 \\ \operatorname{sen} 2x - 1 = 0 \\ \cos x = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Después de resolver la tercera ecuación (la más sencilla) del sistema (20), obtenemos: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$. Poniendo estos valores en la segunda ecuación del sistema, tendremos:

$$\operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) - 1 = \operatorname{sen}(\pi + 2\pi k) - 1 = -1 \neq 0,$$

es decir, el valor $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ no satisface la segunda ecuación del sistema (20). Pero esto significa que dicho sistema es incompatible; así, pues, la ecuación (18) no tiene soluciones.

EJEMPLO 15. Resolvamos la ecuación

$$\sqrt{-3-\cos^2 x+3 \operatorname{sen} 5x}=1-\operatorname{sen} x. \qquad (21)$$

SOLUCION. Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación (20) y ejecutando la postelior reducción a términos semejantes, obtenemos:

$$2 \operatorname{sen} x + 3 \operatorname{sen} 5x = 5. \qquad (22)$$

Como $\operatorname{sen} x \leqslant 1$, $\operatorname{sen} 5x \leqslant 1$, la ecuación (22) se satisface por aquellos, y sólo aquellos, valores de x, con los que, simultáneamente, $\operatorname{sen} x = 1$ y $\operatorname{sen} 5x = 1$. Con otras palabras, la ecuación (22) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x=1 \\ \operatorname{sen} 5x=1. \end{cases} \qquad (23)$$

Resolvámoslo. De la ecuación $\operatorname{sen} x=1$ hallamos $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

Poniendo estos valores de x en el primer miembro de la segunda ecuación del sistema (23), obtenemos:

$$\operatorname{sen} 5\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2}+10\pi k\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=1.$$

Así, pues, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ es la solución del sistema (23) y, por lo tanto, de la ecuación (22).

Pero al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación (21) aparecen soluciones extrañas, por lo que es preciso efectuar la verificación. En el caso dado no es difícil realizarlo poniendo los valores hallados en la ecuación inicial (21). Tenemos:

$$\sqrt{-3-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)+3 \operatorname{sen} 5\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}=0$$

en el primer miembro de la ecuación y

$1-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=0$ en el segundo.

Es decir, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ es la solución de la ecuación (21).

EJEMPLO 16. Resolvamos la ecuación

$$\sqrt{1+\operatorname{sen} 2x}=\sqrt{2}\cos 2x. \qquad (24)$$

SOLUCIÓN. Elevando al cuadrado ambos miembros de (24), obtenemos $1 + \operatorname{sen} 2x = 2\cos^2 2x$. Hagamos $u = \operatorname{sen} 2x$ y, entonces, $\cos^2 2x = 1 - u^2$. Así, llegamos a la ecuación $1 + u = 2(1 - u^2)$, de la que hallamos $u_1 = -1$, $u_2 = \frac{1}{2}$. El problema se ha reducido a resolver un conjunto de ecuaciones: $\operatorname{sen} 2x = -1$; $\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$. De la primera ecuación del conjunto hallamos $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, de la segunda, $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n$.

Como hemos hecho uso de la elevación al cuadrado, podían haber aparecido raíces extrañas. Esto significa que las soluciones halladas han de ser verificadas. En nuestro caso, la más fácil verificación se ejecuta con ayuda de la condición $\cos 2x \geqslant 0$ (con ella, la elevación al cuadrado de ambos miembros de (24) es una transformación que conduce a una ecuación equivalente).

Comprobemos los valores de $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$. Tenemos: $\cos 2x = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 0$. Esto quiere decir que los números de la forma $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ satisfacen la condición $\cos 2x \geqslant 0$ y, por lo tanto, son las soluciones de (24).

Comprobemos los valores de $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n$. Tenemos: $\cos 2x = \cos\left((-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n\right)$. Aduzcamos al parámetro n los valores 0, 1, 2, 3, etc.:

con $n = 0 \cos \frac{\pi}{6} > 0$,

con $n = 1 \cos\left(-\frac{\pi}{6} + \pi\right) < 0$,

con $n = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) > 0$,

con $n = 3 \cos\left(-\frac{\pi}{6} + 3\pi\right) < 0$, etc.

Advertimos que $\cos 2x > 0$ con n par y $\cos 2x < 0$ con n impar. Una conclusión análoga es cierta para $n = -1, -2, -3, \ldots$.

Así, pues, de los valores de la forma $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ hay que tomar sólo aquellos que corresponden a las n pares, o sea, a los números de la forma $n = 2k$. Pero, entonces, obtenemos $x = \frac{\pi}{12} + \pi k$. De modo que la ecuación (24) tiene las siguientes soluciones: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$; $x = \frac{\pi}{12} + \pi k$.

EJEMPLO 17. Resolvamos la ecuación

$$\arccos x - \operatorname{arcsen} x = \frac{\pi}{6}. \tag{25}$$

SOLUCIÓN. Tomemos el coseno de ambos miembros de la ecuación:

$$\cos(\arccos x - \operatorname{arcsen} x) = \cos\frac{\pi}{6}. \tag{26}$$

Consecutivamente obtenemos:

$$x\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2}\,x = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$4x\sqrt{1-x^2} = \sqrt{3}, \tag{27}$$

$$16x^4 - 16x^2 + 3 = 0, \tag{28}$$

de donde $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Durante la resolución de la ecuación (25) dos veces hemos realizado transformaciones que pudieron conducir a la aparición de soluciones extrañas, p. ej., la «toma del coseno», al pasar de la ecuación (25) a la (26) y la elevación al cuadrado al pasar de la (27) a la (28). Por esta razón es obligatoria la verificación de las soluciones halladas.

VERIFICACIÓN. Con $x_1 = \frac{1}{2}$, obtenemos:

$$\arccos x_1 - \operatorname{arcsen} x_1 = \arccos\frac{1}{2} - \operatorname{arcsen}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

Así, pues, $x_1 = \frac{1}{2}$ es una raíz de la ecuación (25).

Con $x_2 = -\frac{1}{2}$, obtenemos:

$$\arccos x_2 - \operatorname{arcsen} x_2 = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} \neq \frac{\pi}{6}$$

O sea, que $x_2 = -\frac{1}{2}$ es una raíz extraña. La verificación muestra que los valores $x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $x_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ son también extraños. Así, pues, $x = \frac{1}{2}$.

EJEMPLO 18. Resolvamos la ecuación

$$\operatorname{arcsen} 2x + \operatorname{arcsen} x = \frac{\pi}{3}. \tag{29}$$

SOLUCIÓN. Tomemos el coseno de ambos miembros de la ecuación (29);

$$\cos(\operatorname{arcsen} 2x + \operatorname{arcsen} x) = \cos\frac{\pi}{3},$$

entonces

$$\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2} - 2x\cdot x = \frac{1}{2},$$

de donde $7x^2 = \frac{3}{4}$, es decir, $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$, $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$.

VERIFICACIÓN. Hagamos $\alpha = \operatorname{arcsen} 2x_1 + \operatorname{arcsen} x_1$. Entonces,

$$\cos\left(\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{3}{7}} + \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\right)\right) = \cos\alpha,$$

de donde $\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{3}{7}}\sqrt{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{7}} - \sqrt{\frac{3}{7}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}}$, es decir, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

Como, a continuación, $0 < \sqrt{\frac{3}{7}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $0 < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $0 < \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{3}{7}} < \frac{\pi}{4}$ y $0 < \operatorname{arcsen}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} < \frac{\pi}{4}$.

Pero, entonces, $0 < \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{3}{7}} + \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\right) < \frac{\pi}{2}$, es decir, α pertenece al primer cuadrante.

Así, pues, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ y $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, pero en tal caso, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ y, por consiguiente, $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ es la raíz de la ecuación (29).

Ahora, comprobemos el valor de $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$. Hagamos $\beta = \operatorname{arcsen} 2x_2 + \operatorname{arcsen} x_2$, entonces $\operatorname{arcsen}\left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right) + \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\right) = \beta$. Como $-1 < -\sqrt{\frac{3}{7}} < 0$ y $-1 < -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} < 0$, $-\pi < \operatorname{arcsen}\left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right) + \operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\right) < 0$ o bien $-\pi < \beta < 0$. Es decir, $\beta \neq \frac{\pi}{3}$, de donde se desprende que $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ es una raíz extraña.

Así, pues, la ecuación (29) tiene una sola raíz $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$.

EJEMPLO 19. Resolvamos la ecuación

$$3\operatorname{arcsen} x + \pi x - \pi = 0. \tag{30}$$

SOLUCIÓN. Según el método de selección es fácil hallar la raíz de la ecuación $x_1 = \frac{1}{2}$. En efecto,

$$3 \operatorname{arcsen} \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi = 3 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Demostremos que no hay otras raíces. Transformemos la ecuación a la forma:

$$3 \operatorname{arcsen} x = \pi - \pi x.$$

La función $y = 3 \operatorname{arcsen} x$ es creciente y la función $y = \pi - \pi x$, decreciente. Pero si un miembro de la ecuación es una función creciente y el otro, decreciente, la ecuación o no tiene raíces, o bien sólo tiene una.

Así, pues, $x = \frac{1}{2}$ es la única raíz de la ecuación (30).

OBSERVACIÓN. El procedimiento utilizado al resolver la ecuación (30) pudo ser empleado para resolver la ecuación (25) (véase la pág. 255). En efecto, $y = \arccos x$ es una función decreciente, mientras que $y = \frac{\pi}{6} + \operatorname{arcsen} x$, creciente, es decir, la ecuación (25) o no tiene raíces, o bien, una sola. Mediante la selección hallamos la única raíz de la ecuación (25): $x = \frac{1}{2}$.

EJEMPLO 20. Resolvamos la ecuación

$$\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 y + 2 = 4 \operatorname{sen} x \cos y. \tag{31}$$

SOLUCIÓN. Hagamos: $\begin{cases} u = \operatorname{sen} x \\ v = \cos y. \end{cases}$

Entonces la ecuación (31) toma la forma:

$$u^4 + v^4 + 2 = 4\,uv. \tag{32}$$

A continuación, tenemos:

$$(u^4 + 1) + (v^4 + 1) - 4\,uv = 0,$$
$$(u^4 - 2u^2 + 1) + (v^4 - 2v^2 + 1) + 2u^2 + 2v^2 - 4uv = 0,$$
$$(u^2 - 1)^2 + (v^2 - 1)^2 + 2\,(u - v)^2 = 0. \tag{33}$$

La ecuación (33) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} u^2 - 1 = 0 \\ v^2 - 1 = 0 \\ u - v = 0 \end{cases}$$

el que, a su vez, es equivalente al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} u=1 \\ v=1 \\ u-v=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} u=1 \\ v=-1 \\ u-v=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} u=-1 \\ v=1 \\ u-v=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} u=-1 \\ v=-1 \\ u-v=0. \end{cases}$$

Los sistemas segundo y tercero de este conjunto no tiene soluciones, mientras que del primero y cuarto, obtenemos:

$$\begin{cases} u_1=1 \\ v_1=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} u_2=-1 \\ v_2=-1. \end{cases}$$

Nos queda resolver el conjunto de dos sistemas de ecuaciones trigonométricas:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x=1 \\ \cos y=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \operatorname{sen} x=-1 \\ \cos y=-1. \end{cases}$$

De este conjunto de sistemas, obtenemos:

$$\begin{cases} x_1=\frac{\pi}{2}+2\pi k \\ y_1=2\pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2=-\frac{\pi}{2}+2\pi k \\ y_2=\pi+2\pi n. \end{cases}$$

EJERCICIOS

Resuelvan las ecuaciones:

1432. $\frac{\cos x}{1+\cos 2x}=0.$ 1433. $\frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\cos 2x}=0.$

1434. $\cos x \operatorname{tg} 3x=0.$ 1435. $\operatorname{sen} 4x \cos x \operatorname{tg} 2x=0.$

1436. $(1+\cos x)\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}-1\right)=0.$ 1437. $(1+\cos x)\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0.$

1438. $\operatorname{sen}^2 3x-5\operatorname{sen} 3x+4=0.$ 1439. $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x=3.$

1440. $8\cos^4 x-8\cos^2 x-\cos x+1=0.$

1441. $2\operatorname{sen}^3 x-\cos 2x-\operatorname{sen} x=0.$ 1442. $2\cos^2 x+5\operatorname{sen} x-4=0.$

1443. $3\operatorname{sen}^2 2x+7\cos 2x=3.$ 1444. $2\cos^2 x+\operatorname{sen} x=2.$

1445. $\sqrt{2}\operatorname{sen}^2 x+\cos x=0.$ 1446. $\operatorname{sen} 2x+\cos 2x=\operatorname{sen} x+\cos x.$

1447. $\sqrt{2}\cos 2x=\cos x+\operatorname{sen} x.$ 1448. $\operatorname{sen} 3x=\cos 2x.$

1449. $\cos 5x=\operatorname{sen} 15x.$ 1450. $\operatorname{sen}(5\pi-x)=\cos(2x+7\pi).$

1451. $4\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}^2 2x=3.$ 1452. $4\cos^2 2x+8\cos^2 x=7.$

1453. $\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1+\cos 2x.$

1454. $8\operatorname{sen}^6 x+3\cos 2x+2\cos 4x+1=0.$

1455. $3(1-\operatorname{sen} x)=1+\cos 2x.$ 1456. $\operatorname{sen} x=\frac{3}{4}\cos x.$

1457. $3\operatorname{sen} x=2\cos x.$ 1458. $3\operatorname{sen}^2 x+3\operatorname{sen} x\cos x-6\cos^2 x=0.$

1459. $\operatorname{sen}^2 x+3\cos^2 x-2\operatorname{sen} 2x=0.$ 1460. $3\operatorname{sen}^2 x+2\operatorname{sen} x\cos x=2.$

1461. $2\cos^2 x-3\operatorname{sen} x\cos x+5\operatorname{sen}^2 x=3.$

1462. $\operatorname{sen} 5x\cos 3x=\operatorname{sen} 9x\cos 7x.$

1463. $\operatorname{sen} 6x\cos 2x=\operatorname{sen} 5x\cos 3x-\operatorname{sen} 2x.$

1464. $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$. 1465. $2\cos^2 x + \cos 5x = 1$.
1466. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x = 0$.
1467. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \cos x + \cos 3x = 0$.
1468. $\sqrt{3}\operatorname{sen} 2x + \cos 2x = \sqrt{2}$.
1469. $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x = \operatorname{sen} 5x$. 1470. $2\cos 3x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x + \cos x = 0$.
1471. $\operatorname{sen} 5x + \cos 5x = \sqrt{2}\cos 13x$. 1472. $\operatorname{sen}^2 x - \cos 2x = 2 - \operatorname{sen} 2x$.
1473. $\operatorname{sen}^6 x + \operatorname{sen}^4 x\cos^2 x = \operatorname{sen}^3 x\cos^3 x + \operatorname{sen} x\cos^5 x$.
1474. $\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x - 10\operatorname{sen} x\cos^3 x + 21\cos^4 x = 0$.
1475. $8\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} - 3\operatorname{sen} x - 4 = 0$. 1476. $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$.
1477. $\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen} 2x + \frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2x = 0$. 1478. $3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg} x = \frac{5}{\operatorname{sen} x}$.
1479. $\cos 2x - 3\cos x + 1 = \frac{1}{(\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x)\operatorname{sen}(x-\pi)}$.
1480. $\cos x = \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$. 1481. $\operatorname{ctg} x + \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = 2$.
1482. $2\operatorname{sen} x - 3\cos x = 3$. 1483. $3\operatorname{sen} 2x + \cos 2x = 2$.
1484. $\cos 4x + 2\operatorname{sen} 4x = 1$. 1485. $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{tg} x = 2$.
1486. $\frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$. 1487. $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 1$.
1488. $4\operatorname{sen}^4 3x - 3\cos x + 5 = 0$.
1489. $\operatorname{sen} x\cos x - 6\operatorname{sen} x + 6\cos x + 6 = 0$.
1490. $4 - 4(\cos x - \operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} 2x = 0$.
1491. $5\operatorname{sen} 2x - 11(\operatorname{sen} x + \cos x) + 7 = 0$.
1492. $\left(2\operatorname{sen}^4\frac{x}{2} - 1\right)\frac{1}{\cos^4\frac{x}{2}} = 2$.
1493. $\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x = \frac{1}{16}$.
1494. $2\operatorname{sen} 17x + \sqrt{3}\cos 5x + \operatorname{sen} 5x = 0$.
1495. $4\cos^3\frac{x}{2} + 3\sqrt{2}\operatorname{sen} x = 8\cos\frac{x}{2}$.
1496. $\frac{7}{4}\cos\frac{x}{4} = \cos^3\frac{x}{4} + \operatorname{sen}\frac{x}{2}$. 1497. $4\operatorname{sen} 2x - \operatorname{tg}^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 4$.
1498. $(\operatorname{sen} 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 - 5 = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$.
1499. $\frac{1 - \operatorname{sen} x + \ldots + (-1)^n\operatorname{sen}^n x + \ldots}{1 + \operatorname{sen} x + \ldots + \operatorname{sen}^n x + \ldots} = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$.
1500. $\cos\frac{4x}{3} = \cos^2 x$. 1501. $\operatorname{sen} x + 2\cos x = \cos 2x - \operatorname{sen} 2x$.
1502. $32\cos^6 x - \cos 6x = 1$. 1503. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - \cos 4x = 3$.
1504. $2(1 - \operatorname{sen} x - \cos x) + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 0$.

1505. $\operatorname{sen}^5 x - \cos^5 x = \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}$.

1506. $\operatorname{sen}^8 2x + \cos^8 2x = \frac{41}{128}$. 1507. $\operatorname{sen}^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{64}$.

1508. $\operatorname{sen}^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16} \cos^4 2x$. 1509. $|\cos x| = \cos x - 2 \operatorname{sen} x$.

1510. $|\operatorname{ctg} x| = \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\operatorname{sen} x}$. 1511. $\sqrt{5 - 2 \operatorname{sen} x} = 6 \operatorname{sen} x - 1$.

1512. $\sqrt{2 + 4 \cos x} = \frac{1}{2} + 3 \cos x$.

1513. $\sqrt{3 + 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 + 3 \operatorname{tg} x}{2}$.

1514. $\sqrt{-3 \operatorname{sen} 5x - \cos^2 x - 3} + \operatorname{sen} x = 1$.

1515. $\operatorname{tg} x + \frac{1}{9} \operatorname{ctg} x = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} - 1$.

1516. $(1 + \cos x) \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} + \operatorname{sen} x = 2 \cos x$.

1517. $\sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{2}} + \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{2}} = 2$.

1518. $\sqrt{1 - 2 \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + 2 \operatorname{ctg} x} = 2$.

1519. $\sqrt{3} \operatorname{sen} x - \sqrt{2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} 2x + 3 \cos^2 x} = 0$.

1520. $\cos x + \sqrt{\operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} 2x + 4 \cos^2 x} = 0$.

1521. $\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{1 + \operatorname{sen} 2x} = 2 \sqrt{\operatorname{sen} x + \cos x}$.

1522. $2 \operatorname{ctg} 2x - 3 \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$. 1523. $6 \operatorname{tg} x + 5 \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$.

1524. $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4 \cos^2 x}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}}$.

1525. $\operatorname{sen}^2 5x \left(\operatorname{sen} 7x \cos x - \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos 7x\right) = \frac{\operatorname{sen} \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} + \operatorname{sen} x \cdot \cos 7x}{1 + \operatorname{ctg}^2 5x}$.

1526. $\operatorname{sen}^6 x + \operatorname{sen}^4 x + \cos^6 x + \cos^4 x + \operatorname{sen} \frac{x}{2} = 3$.

1527. $1 + \cos 2x \cos 3x = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 3x$.

1528. $\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} x = 2 + \cos^2 x$. 1529. $3 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{3} + 5 \operatorname{sen}^2 x = 8$.

1530. $(\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x) \operatorname{sen} 3x = 2$.

1531. $2 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{3} x - \frac{\pi}{6}\right) - 3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 5$.

1532. $\operatorname{sen} \frac{x}{4} + 2 \cos \frac{x - 2\pi}{3} = 3$.

1533. $\operatorname{sen} 18x + \operatorname{sen} 10x + \operatorname{sen} 2x = 3 + \cos^2 2x$.

1534. $\cos 2x \left(1 - \frac{3}{4} \operatorname{sen}^2 2x\right) = 1$. 1535. $4x^4 + x^6 = -\operatorname{sen}^2 5x$.

1536. $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2} + \operatorname{sen}^4 4x$.

1537. $\cos^6 2x = 1 + \operatorname{sen}^4 x$. 1538. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}\cos 2\pi x\right) = \sqrt{3}$.

1539. $2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 2 - \cos(\pi \operatorname{sen} 2x)$.

1540. $4\operatorname{arctg}(x^2 - 3x + 3) = \frac{\pi}{4}$. 1541. $\operatorname{arctg} 3x - \operatorname{arcctg} 3x = \frac{\pi}{4}$.

1542. $2\operatorname{arcsen}^2 x - 5\operatorname{arcsen} x + 2 = 0$.

1543. $4\operatorname{arctg} x - 6\operatorname{arcctg} x = \pi$.

1544. $2\operatorname{arcsen} x = \arccos(1 - x) = \operatorname{arcsen}(-x)$.

1545. $2\operatorname{arcsen} x = \arccos 2x$. 1546. $\operatorname{arcsen}\frac{x}{2} + \arccos\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$.

1547. $\arccos x = \operatorname{arctg} x$. 1548. $\operatorname{arcsen}\frac{2}{3\sqrt{x}} - \operatorname{arcsen}\sqrt{1-x} = \operatorname{arcsen}\frac{1}{3}$.

1549. $3\arccos x - \pi x - \frac{\pi}{2} = 0$.

1550. $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{3}{x}} - \frac{\pi}{6} = 0$.

1551. $\cos(x - y) - 2\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} y = 3$.

1552. $\operatorname{sen}^2(\pi x) + \log_2^2(y^2 - 2y + 1) = 0$.

1553. $\left(\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right) + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2}\operatorname{sen} y$.

1554. $1 - 2x - x^2 = \operatorname{tg}^2(x + y) + \operatorname{ctg}^2(x + y)$.

1555. $\operatorname{tg}^2 2x + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} 2x + 3 = -\operatorname{ctg}^2\left(4y - \frac{\pi}{6}\right)$.

1556. $x^2 + 2x \operatorname{sen} xy + 1 = 0$.

1557. $4 + \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 2x = 5\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 y$.

1558. $\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)(1 + \operatorname{tg}^2 2y)(3 + \operatorname{sen} 3z) = 4$.

1559. Resuelvan la ecuación $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{y} = \operatorname{arctg} 3$ en números enteros.

§ 5. Sistemas de ecuaciones

Al resolver sistemas de ecuaciones trigonométricas se hace uso de los mismos procedimientos que durante la resolución de ecuaciones algebraicas. Con frecuencia suele ser más cómodo en lugar de las fórmulas generales, según las cuales se resuelven las ecuaciones del tipo $\operatorname{sen} x = a$, $\cos x = a$, escribir la solución de dichas ecuaciones en forma del conjunto de dos familias. Sea, p. ej., necesario resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}\operatorname{sen}(x + y) = \frac{1}{2}\\ \cos(x - y) = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases} \qquad (1)$$

Al emplear las fórmulas generales llegaremos al sistema

$$\begin{cases} x+y=(-1)^k \frac{\pi}{6}+\pi k \\ x-y=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, \end{cases} \qquad (2)$$

de donde hallamos:

$$\begin{cases} x_{1,2}=(-1)^k \frac{\pi}{12}\pm\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}+\pi n \\ y_{1,2}=(-1)^k \frac{\pi}{12}\mp\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}-\pi n \end{cases} \qquad (3)$$

que es la solución del sistema (1). Si la solución de la primera ecuación de (1) la escribimos en forma del conjunto $x+y=\frac{\pi}{6}+2\pi k$; $x+y=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$ y la solución de la segunda ecuación de (1), en forma del conjunto $x-y=\frac{\pi}{4}+2\pi n$; $x-y=-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, obtendremos un conjunto de cuatro sistemas:

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{6}+2\pi k \\ x-y=\frac{\pi}{4}+2\pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x+y=\frac{5\pi}{6}+2\pi k \\ x-y=\frac{\pi}{4}+2\pi n \end{cases}; \qquad (4)$$

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{6}+2\pi k \\ x-y=-\frac{\pi}{4}+2\pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x+y=\frac{5\pi}{6}+2\pi k \\ x-y=-\frac{\pi}{4}-2\pi n, \end{cases}$$

de donde

$$\begin{cases} x_1=\frac{5\pi}{24}+\pi(k+n) \\ y_1=-\frac{\pi}{24}+\pi(k-n) \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2=\frac{13\pi}{24}+\pi(k+n) \\ y_2=\frac{7\pi}{24}+\pi(k-n) \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_3=-\frac{\pi}{24}+\pi(k+n) \\ y_3=\frac{5\pi}{24}+\pi(k-n) \end{cases}; \quad \begin{cases} x_4=\frac{7\pi}{24}+\pi(k+n) \\ y_4=\frac{13\pi}{24}+\pi(k-n). \end{cases}$$

Este conjunto de familias es la solución del sistema (1). Claro está, que semejante anotación no es tan compacta como la solución escrita en forma del sistema (3), pero es más evidente, por lo que a ella, con frecuencia se le da preferencia.

Llamemos la atención del lector hacia una circunstancia: al pasar del sistema (1) al (2) o bien al conjunto de sistemas (4) hemos empleado el parámetro k para escribir las soluciones de la primera ecuación

del sistema (1), mientras que para escribir las soluciones de la segunda ecuación del sistema, otro parámetro, n. El empleo de un solo parámetro, p.ej., k, nos hubiera conducido a la pérdida de soluciones: en tal caso, del primer sistema del conjunto (4) hubiéramos obtenido

$$\begin{cases} x_1' = \frac{5\pi}{24} + 2\pi k \\ y_1' = -\frac{\pi}{24}, \end{cases}$$

mientras que el conjunto de Z_1' pares del tipo $(x_1'; y_1')$ es el propio subconjunto del conjunto de Z_1 pares de tipo $(x_1; y_1)$,

donde $$\begin{cases} x_1 = \frac{5\pi}{24} + \pi(k+n) \\ y_1 = -\frac{\pi}{24} + \pi(k-n). \end{cases}$$

Así, pues, $Z' \in Z_1$, $Z' \neq Z_1$, por lo que todos los pares $(x; y)$ son tales que $(x; y) \in Z_1 \setminus Z'$ resultan ser soluciones «perdidas».

Examinemos ejemplos.

EJEMPLO 1. Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = 0{,}75 \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3. \end{cases} \tag{5}$$

SOLUCIÓN. Dividiendo los miembros primero y segundo de la primera ecuación del sistema (5) por los miembros primero y segundo, respectivamente, de la segunda ecuación del sistema, obtenemos la ecuación $\cos x \cos y = \frac{1}{4}$. Sustituyendo con ésta la segunda ecuación del sistema (5), obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{3}{4} \\ \cos x \cos y = \frac{1}{4} \end{cases} \tag{6}$$

que es equivalente al (5).

Ahora, sustituyamos la primera ecuación del sistema (6) por la suma de las ecuaciones de éste y la segunda ecuación por la diferencia entre la segunda y primera ecuaciones. Obtenemos un nuevo sistema:

$$\begin{cases} \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = 1 \\ \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = -\frac{1}{2}, \end{cases} \tag{7}$$

o bien $$\begin{cases} \cos(x-y) = 1 \\ \cos(x+y) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

equivalente al sistema (6). De la primera ecuación del sistema (7) hallamos $x - y = 2\pi k$, la segunda ecuación del sistema (7) es equivalente al conjunto de ecuaciones $x + y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $x + y = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

Así, pues, del sistema (7) hemos pasado al conjunto de sistemas

$$\begin{cases} x - y = 2\pi k \\ x + y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x - y = 2\pi k \\ x + y = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \tag{8}$$

que es equivalente al sistema (7). Del primer sistema del conjunto (8) hallamos la familia de soluciones:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi (n + k) \\ y_1 = \frac{\pi}{3} + \pi (n - k). \end{cases}$$

Del segundo sistema del conjunto (8) hallamos la familia de soluciones:

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{\pi}{3} + \pi (n + k) \\ y_2 = -\frac{\pi}{3} + \pi (n - k). \end{cases}$$

VERIFICACIÓN Como al resolver la ecuación sólo se realizaron transformaciones equivalentes (lo que se señaló en el proceso de la resolución), el conjunto de familias

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi (n + k) \\ y_1 = \frac{\pi}{3} + \pi (n - k) \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{\pi}{3} + \pi (n + k) \\ y_2 = -\frac{\pi}{3} + \pi (n - k) \end{cases}$$

es la solución del sistema (5).

EJEMPLO 2. Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^3 x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} y \\ \cos^3 x = \frac{1}{2} \cos y. \end{cases} \tag{9}$$

SOLUCIÓN. Elevemos al cuadrado ambos miembros de las dos ecuaciones del sistema (9) y sumemos, término por término, las ecuacio-

nes obtenidas como resultado de dicha transformación. Tendremos $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$ y del sistema (9) pasaremos a un nuevo sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4} \\ \operatorname{sen}^3 x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} y. \end{cases} \qquad (10)$$

Al señalar que la ecuación $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$, resolvamos primero ésta. Consecutivamente obtenemos:

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}\,; \ \cos 2x = 0, \ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k.$$

Así, pues, la resolución del sistema (10) se ha reducido a resolver el sistema

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \\ \operatorname{sen}^3 x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} y. \end{cases} \qquad (11)$$

Tenemos: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \\ \frac{1}{2} \operatorname{sen} y = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \end{cases}$ o bien $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \\ \operatorname{sen} y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

de donde $$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \\ y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n. \end{cases} \qquad (12)$$

El paso del sistema (9) al (10) es posible que no fuera una transformación equivalente (elevación al cuadrado), por lo que es necesaria la verificación.

VERIFICACIÓN. Representemos los valores de x e y, contenidos en el sistema (12), con puntos en dos círculos numéricos (fig. 38). En el punto A_1 tenemos $\operatorname{sen} x > 0$, $\cos x > 0$. Entonces, del sistema (9) llegamos a la conclusión de que $\operatorname{sen} y > 0$ y $\cos y > 0$. Pero de los puntos B_1, B_2, B_3, B_4 sólo el punto B_1 tiene la abscisa y ordenada positivas. Esto significa, que $(A_1;\ B_1)$ es la solución geométrica del sistema (9), es decir,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ y_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases}$$ es la solución del sistema (9).

Razonando de forma análoga, obtenemos $(A_2; B_2)$, $(A_3; B_3)$ $(A_4; B_4)$ que son las soluciones geométricas del sistema (9), o sea,

$$\begin{cases} x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ y_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x_3 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \\ y_3 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x_4 = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \\ y_4 = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n \end{cases}$$

son las soluciones del sistema (9)

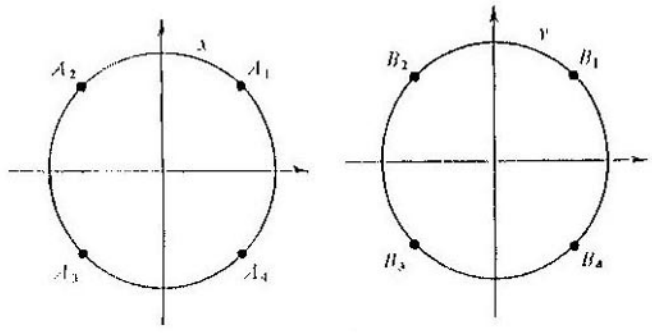


Fig. 38

Así, pues, el siguiente conjunto de familias es la solución del sistema (9):

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ y_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ y_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_3 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \\ y_3 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x_4 = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \\ y_4 = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n. \end{cases}$$

EJEMPLO 3. Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = \pi \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} z = 2 \\ \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = 18 \end{cases} \tag{13}$$

SOLUCIÓN. Como $x + y + z = \pi$, $\operatorname{tg}(x + y) = \operatorname{tg}(\pi - z)$, es decir, $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = -\operatorname{tg} z$.

Con esta ecuación sustituyamos la primera ecuación del sistema (13) y consideremos el nuevo sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}=-\operatorname{tg} z \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} z=2 \\ \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z=18. \end{cases} \qquad (14)$$

Introduzcamos nuevas variables: $\begin{cases} u=\operatorname{tg} x \\ v=\operatorname{tg} y \\ w=\operatorname{tg} z. \end{cases}$

Entonces el sistema (14) toma la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{u+v}{1-uv}=-w \\ uw=2 \\ vw=18 \end{cases} \qquad (15)$$

o bien $$\begin{cases} uvw=u+v+w \\ uw=2 \\ vw=18. \end{cases} \qquad (16)$$

Dividiendo la primera ecuación del sistema (16) por la segunda, término por término, obtenemos $v=\dfrac{u+v+w}{2}$, de donde $v=u+w$. Sustituyamos con esta ecuación la primera del sistema (16). Tendremos:

$$\begin{cases} v=u+w \\ uw=2 \\ vw=18, \end{cases} \qquad (17)$$

y, a continuación,

$$\begin{cases} v=u+w \\ uw=2 \\ (u+w)\,w=18, \end{cases} \qquad \begin{cases} v=u+w \\ uw=2 \\ w^2=16. \end{cases} \qquad (18)$$

El sistema (18) tiene las siguientes soluciones:

$$\begin{cases} u_1=0{,}5 \\ v_1=4{,}5\,; \\ w_1=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2=-0{,}5 \\ v_2=-4{,}5 \\ w_2=-4. \end{cases}$$

Retornando a las antiguas variables, obtenemos:

$$\begin{cases} x_1 = \operatorname{arctg} 0{,}5 + \pi k \\ y_1 = \operatorname{arctg} 4{,}5 + \pi n \\ z_1 = \operatorname{arctg} 4 + \pi m \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2 = -\operatorname{arctg} 0{,}5 + \pi k \\ y_2 = -\operatorname{arctg} 4{,}5 + \pi n \\ z_2 = -\operatorname{arctg} 4 + \pi m. \end{cases} \tag{19}$$

VERIFICACIÓN. Durante la resolución tres veces se han realizado transformaciones, cada una de las cuales pudo conducir a un sistema no equivalente: «tomado de la tangente» al pasar del sistema (13) al (14), la eliminación del denominador al pasar del sistema (15) al (16) y la división al pasar del sistema (16) al (17). A la pérdida de soluciones pudo sólo conducir la división, pero en nuestro caso esto no sucedió, ya que el segundo miembro de la «ecuación-divisor» es igual a 2, es decir, distinto de cero. Las demás transformaciones pudieron llevar a la aparición de soluciones extrañas: el «cribado» de las soluciones extrañas puede realizarse con ayuda de la sustitución directa de los valores, contenidos en el conjunto (19) hallado más arriba, en el sistema inicial. Es fácil cerciorarse de que el conjunto (19) satisface la segunda y tercera ecuaciones del sistema (13). Para satisfacer la primera ecuación de este sistema, será necesario escribir las soluciones del conjunto (19) de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x_1 = \operatorname{arctg} 0{,}5 + \pi k \\ y_1 = \operatorname{arctg} 4{,}5 + \pi n \\ z_1 = \operatorname{arctg} 4 - \pi k - \pi n \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2 = -\operatorname{arctg} 0{,}5 + \pi k \\ y_3 = -\operatorname{arctg} 4{,}5 + \pi n \\ z_2 = -\operatorname{arctg} 4 - \pi k - \pi n + 2\pi \end{cases} \tag{20}$$

(hemos hecho uso de que $\operatorname{arctg} 0{,}5 + \operatorname{arctg} 4{,}5 + \operatorname{arctg} 4 = \pi$, lo que sigue de la solución del ejemplo).

El conjunto de familias (20) es la solución del sistema (13).

EJEMPLO 4. Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = \cos y \\ \sqrt{6} \operatorname{sen} y = \operatorname{tg} z \\ 2 \operatorname{sen} z = \sqrt{3} \operatorname{ctg} x. \end{cases} \tag{21}$$

SOLUCIÓN. Elevemos al cuadrado ambos miembros de cada una de las ecuaciones del sistema (12). Obtenemos:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 y \\ 6 \operatorname{sen}^2 y = \operatorname{tg}^2 z \\ 4 \operatorname{sen}^2 z = 3 \operatorname{ctg}^2 x. \end{cases} \tag{22}$$

Introducimos nuestras variables: $\begin{cases} u = \operatorname{sen}^2 x \\ v = \operatorname{sen}^2 y \\ w = \operatorname{sen}^2 z. \end{cases}$

Entonces, el sistema (22) toma la forma:

$$\begin{cases} u=1-v, \\ 6v=\dfrac{w}{1-w}, \\ 4w=3\dfrac{1-u}{u}, \end{cases} \quad (23)$$

de donde hallamos:

$$\begin{cases} u_1=1 \\ v_1=0 \\ w_1=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} u_2=\dfrac{1}{2} \\ v_2=\dfrac{1}{2} \\ w_2=\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

que son las soluciones del sistema (23).

Ahora, el problema se reduce a resolver el siguiente conjunto de sistemas:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x=1 \\ \operatorname{sen}^2 y=0 \\ \operatorname{sen}^2 z=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x=\dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}^2 y=\dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}^2 z=\dfrac{3}{4} \end{cases}. \quad (24)$$

Del primer sistema de este conjunto hallamos:

$$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k \\ y=\pi n \\ z=\pi m. \end{cases} \quad (25)$$

Del segundo sistema del conjunto (24) hallamos:

$$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2} \\ y=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2} \\ z=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi m. \end{cases} \quad (26)$$

VERIFICACIÓN. Pongamos las soluciones halladas (25) y (26) en el sistema inicial (21). Con este fin, hagamos uso del mismo procedimiento que se utilizó al resolver el ejemplo 3, o sea, representemos

los valores de x, y, z contenidos en el sistema (25) con puntos en tres círculos numéricos (fig. 39), respectivamente.

Tomemos el punto A_1. En él sen $x > 0$ y, por lo tanto, cos $y > 0$ (véase la primera ecuación del sistema (21)). Entonces, de dos puntos B_1, B_2 elegimos el que tiene abscisa positiva, es decir B_1. Señalemos que, en tal caso, podemos tomar cualquier de los puntos C_1, C_2.

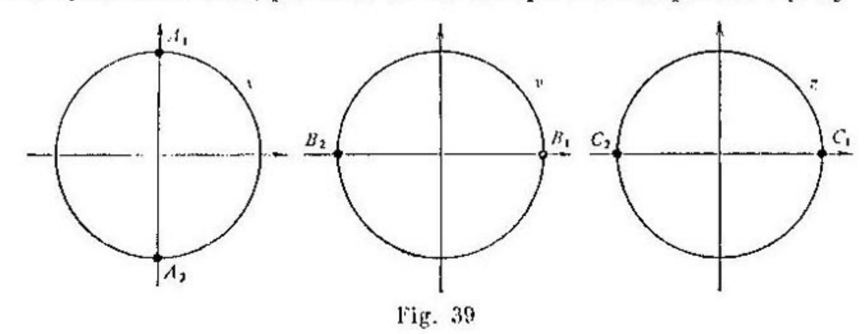


Fig. 39

De modo analogo, al punto A_2 corresponde el B_2. Así, pues, hemos obtenido cuatro soluciones geométricas: $(A_1;\ B_1;\ C_1)$, $(A_1,\ B_1,\ C_2)$, $(A_2;\ B_2;\ C_1)$ $(A_2;\ B_2;\ C_2)$.

De esta forma, en lugar de la familia (25) obtenemos el siguiente conjunto de familias:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ y_1 = 2\pi n \\ z_1 = \pi m \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ y_2 = \pi + 2\pi n \\ z_2 = \pi m \end{cases} \tag{27}$$

(los restantes tríos $(x;\ y;\ z)$, contenidos en la familia (25), son soluciones extrañas para el sistema inicial).

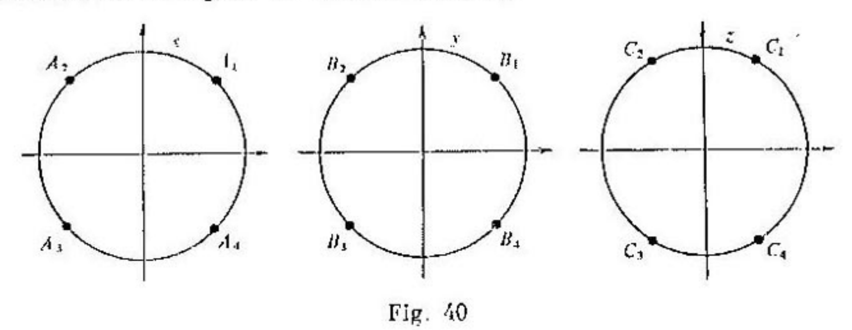


Fig. 40

Ahora representemos con puntos en los círculos numéricos los valores de x, y, z contenidos en el sistema (26) (fig. 40). Consideremos el punto A_1. En él sen $x > 0$, ctg $x > 0$, de manera que cos $y > 0$,

sen z > 0 (véanse las ecuaciones primera y tercera del sistema (21). Como cos $y > 0$, en el segundo círculo elegimos los puntos con abscisas positivas B_1 y B_4. Ya que sen $z > 0$, en el tercer círculo elegimos los puntos con ordenadas positivas C_1 y C_2. Analicemos el punto B_1. En él sen $y > 0$, o sea, tg $z > 0$ (véase la segunda ecuación del sistema (21)) y, por ello, de los puntos C_1, C_2 elegimos C_1 (en él tg $z > 0$). Por analogía, al punto B_2 corresponderá C_2.

Así, pues, hemos obtenido dos soluciones geométricas más (A_1; B_1; C_1) y (A_1; B_2; C_2) y, correspondientemente, el siguiente conjunto de familias de soluciones del sistema (21):

$$\begin{cases} x_3 = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ y_3 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n\,; \\ z_3 = \frac{\pi}{4} + 2\pi m \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ y_4 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \\ z_4 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m. \end{cases} \tag{28}$$

Razonando por analogía, hallamos seis soluciones geométricas más: (A_2; B_1; C_3), (A_2; B_4; C_4), (A_3; B_2; C_1), (A_3; B_3; C_2), (A_4; B_2; C_3), (A_4; B_3; C_4) y, correspondientemente, el conjunto de familias de soluciones:

$$\begin{cases} x_5 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ y_5 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n\,; \\ z_5 = \frac{4\pi}{3} + 2\pi m \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ y_6 = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n\,, \\ z_6 = \frac{5\pi}{3} + 2\pi m \end{cases} \quad \begin{cases} x_7 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \\ y_7 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\,; \\ z_7 = \frac{\pi}{3} + 2\pi m \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_8 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \\ y_8 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\,; \\ z_8 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m \end{cases} \quad \begin{cases} x_9 = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \\ y_9 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\,; \\ z_9 = \frac{4\pi}{3} + 2\pi m \end{cases} \quad \begin{cases} x_{10} = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \\ y_{10} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \\ z_{10} = \frac{5\pi}{3} + 2\pi m. \end{cases} \tag{29}$$

Así, pues, el conjunto de familias (27), (28) y (29) es la solución del sistema (21).

EJERCICIOS

Resuelvan los sistemas de ecuaciones

1560. $\begin{cases} \operatorname{sen}(x+y) = 0 \\ \operatorname{sen}(x-y) = 0. \end{cases}$ 1561. $\begin{cases} \operatorname{sen} x \cos y = 0{,}25 \\ \operatorname{sen} y \cos x = 0{,}75. \end{cases}$

1562. $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos y = 0 \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}. \end{cases}$ 1563. $\begin{cases} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = 0{,}25 \\ x + y = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

1564. $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \dfrac{1}{\cos y} = 2 \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos y} = 0,5. \end{cases}$ 1565. $\begin{cases} \cos x + \cos y = 0,5 \\ \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y = 1,75. \end{cases}$

1566. $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 0 \\ \cos x + \cos y = 0. \end{cases}$ 1567. $\begin{cases} x - y = \dfrac{1}{3} \\ \cos^2 \pi x - \operatorname{sen}^2 \pi y = 0,5. \end{cases}$

1568. $\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y = 0,75 \\ x + y = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$ 1569. $\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = 0,25 \\ x + y = \dfrac{5\pi}{6}. \end{cases}$

1570. $\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = 0,5 \\ x + y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$ 1571. $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ \cos \dfrac{x}{2} + \cos \dfrac{y}{2} = \dfrac{\sqrt{2} - 2}{2}. \end{cases}$

1572. $\begin{cases} \cos x \operatorname{sen} y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x + y = \dfrac{3\pi}{4}. \end{cases}$ 1573. $\begin{cases} \dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} y \\ x - y = \dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$

1574. $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1. \\ x + y = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$ 1575. $\begin{cases} \operatorname{sen} x \operatorname{ctg} y = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ \operatorname{tg} x \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

1576. $\begin{cases} \cos (x - y) = 2 \cos (x + y) \\ \cos x \cos y = 0,75. \end{cases}$ 1577. $\begin{cases} \operatorname{sen} (x - y) = 3 \operatorname{sen} x \cos y - 1 \\ \operatorname{sen} (x + y) = -2 \cos x \operatorname{sen} y. \end{cases}$

1578. $\begin{cases} \cos \dfrac{x + y}{2} \cos \dfrac{x - y}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$ 1579. $\begin{cases} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{4\sqrt{2}} \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

1580. $\begin{cases} \operatorname{sen} x = 3 \operatorname{sen} y \\ \operatorname{tg} x = 5 \operatorname{tg} y. \end{cases}$ 1581. $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$

1582. $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{6} \\ 5 (\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y) = 2 (1 + \cos^2 (x - y)). \end{cases}$

1583. $\begin{cases} x - y = \dfrac{5\pi}{3} \\ \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} y. \end{cases}$ 1584. $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \dfrac{1}{6}. \end{cases}$

1585. $\begin{cases} \sqrt{2} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} y \\ \sqrt{2} \cos x = \sqrt{3} \cos y. \end{cases}$

1586. $\begin{cases} \operatorname{sen} x \cos (x + y) + \operatorname{sen} (x + y) = 3 \cos (x + y) \\ 4 \operatorname{sen} x = 5 \operatorname{ctg} (x + y). \end{cases}$

1587. $\begin{cases} \operatorname{ctg} x + \operatorname{sen} 2y = \operatorname{sen} 2x \\ 2 \operatorname{sen} y \operatorname{sen} (x + y) = \cos x. \end{cases}$ 1588. $\begin{cases} 4 \operatorname{tg} 3y = 3 \operatorname{tg} 2x \\ 2 \operatorname{sen} x \cos (x - y) = \operatorname{sen} y. \end{cases}$

1589. $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = 3 \\ |x-y| = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$ 1590. $\begin{cases} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 2y \\ \cos x = \operatorname{sen} y. \end{cases}$

1591. $\begin{cases} x + y = \dfrac{2\pi}{3} \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = 2. \end{cases}$ 1592. $\begin{cases} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{2} \\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

1593. $\begin{cases} \operatorname{sen} y = 5 \operatorname{sen} x \\ 3 \cos x + \cos y = 2. \end{cases}$ 1594. $\begin{cases} \cos x \cos y = \dfrac{1+\sqrt{2}}{4} \\ \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = 3 + 2\sqrt{2}. \end{cases}$

1595. $\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x = \cos x \cos y \\ \cos^2 x = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y. \end{cases}$ 1596. $\begin{cases} \cos^2 y + 3 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = 0 \\ 21 \cos 2x - \cos 2y = 10. \end{cases}$

1597. $\begin{cases} \cos^2 4x + \dfrac{\sqrt{26}-2}{2} \operatorname{tg}(-2y) = \dfrac{\sqrt{26}-1}{4}. \\ \operatorname{tg}^2(-2y) - \dfrac{\sqrt{26}-2}{2} \cos 4x = \dfrac{\sqrt{26}-1}{4}. \end{cases}$

1598. $\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} y \\ \cos^4 x = \cos y. \end{cases}$ 1599. $\begin{cases} x + y + z = \pi \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} z = 3 \\ \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = 6. \end{cases}$

1600. $\begin{cases} x + y + z = \pi \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 2 \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = 6. \end{cases}$ 1601. $\begin{cases} x + y + z = \pi \\ \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} y \\ \sqrt{3} \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} z. \end{cases}$

1602. $\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 z = 1 \\ \cos^2 x + \cos^2 y - \cos^2 z = 1 \\ \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{tg}^2 z = 1. \end{cases}$

1603. Hallen la solución de los sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} |\operatorname{sen} x| \operatorname{sen} y = -\dfrac{1}{4} \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

que satisfacen las condiciones: $\begin{cases} 0 < x < 2\pi \\ \pi < y < 2\pi. \end{cases}$

§ 6. Desigualdades

La resolución de las desigualdades trigonométricas, por regla, se reduce a resolver las más sencillas desigualdades trigonométricas, es decir, del tipo $\operatorname{sen} x > a$, $\cos x < a$, etc., así como a resolver conjuntos, sistemas o bien conjuntos de sistemas de las más sencillas desigualdades trigonométricas. Con este fin, en muchos casos, es cómodo emplear un círculo (en adelante será designado por Σ), en el que el conjunto de los valores de la variable, que satisfacen la más sencilla desigualdad dada, se representa en forma de uno o varios arcos.

Lo mismo que con ayuda de desigualdades se prefijan los intervalos en la recta numérica, es asimismo posible anotar un conjunto de puntos, pertenecientes a uno u otro arco del círculo Σ.

Acordemos designar con el símbolo $\cup M_1M_2$ un arco para el que M_1 es el punto inicial (en la designación del arco él se escribe el primero), M_2, el punto final del recorrido descrito por el punto corriente por el círculo Σ en sentido positivo (antihorario).

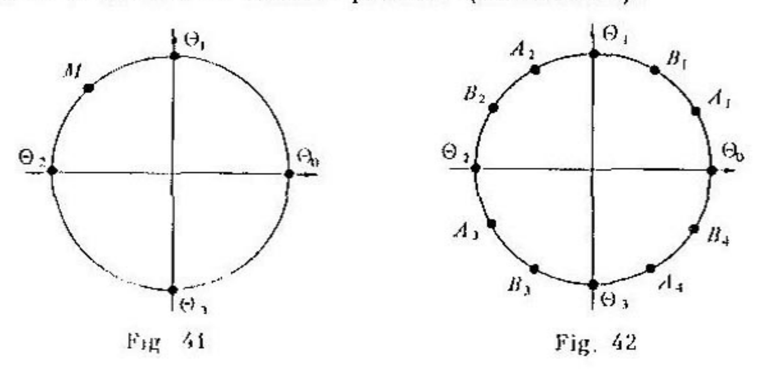


Fig. 41 Fig. 42

P. ej., con ayuda de desigualdades hay que escribir los siguientes arcos del círculo Σ (fig. 41): 1) $\cup\Theta_0\Theta_1$; 2) $\cup\Theta_1\Theta_3$; 3) $\cup\Theta_1\Theta_0$; 4) $\cup\Theta_2\Theta_1$; 5) $\cup\Theta_0M$; 6) $\cup M\Theta_0$; 7) $\cup\Theta_3M$, donde el punto M es el punto medio del arco $\Theta_1\Theta_2$.

1) El punto Θ_0 corresponde al número 0, el punto Θ_1, al número $\frac{\pi}{2}$, por ello, el punto corriente del arco $\Theta_0\Theta_1$ corresponde a un número x tal que $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

No obstante, tomando en consideración que si un punto del círculo corresponde al número x, él también corresponde a todos los números del tipo $x + 2\pi k$ (k es un número entero) y resulta que los puntos del arco $\Theta_0\Theta_1$ corresponden a los números x que satisfacen el siguiente sistema de desigualdades:

$$0 + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ o bien } 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Esta es la anotación analítica del arco $\Theta_0\Theta_1$.

2) Para el arco $\Theta_1\Theta_3$, obtenemos: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$.

3) Como indicamos más arriba, en tal caso por la anotación $\cup\Theta_1\Theta_0$ se entiende el arco $\Theta_1\Theta_2\Theta_3\Theta_0$. Al recorrer por primera vez el círculo el punto Θ_1 corresponde al número $\frac{\pi}{2}$, mientras que Θ_0, al número 2π (pero no al número 0, ya que el recorrido del círculo desde

Θ_1 hasta Θ_0 transcurre en sentido positivo), es decir, desde el punto de vista analítico $\cup\Theta_1\Theta_0$ puede ser escrita del modo siguiente:

$$\frac{\pi}{2}+2\pi k \leqslant x \leqslant 2\pi+2\pi k.$$

4) El arco $\Theta_2\Theta_1$ puede escribirse con dos procedimientos:

$$-\pi+2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}+2\pi k \text{ o bien } \pi+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{2}+2\pi n.$$

5) $\cup\ \Theta_0 M$: $2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4}+2\pi k.$

6) $\cup\ M\Theta_0$: $\frac{3\pi}{4}+2\pi k \leqslant x \leqslant 2\pi+2\pi k.$

7) $\cup\ \Theta_3 M$: $-\frac{\pi}{2}+2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4}+2\pi k.$

OBSERVACIÓN. Al escribir el arco en la forma

$$\alpha+2\pi k \leqslant x \leqslant \beta+2\pi k, \tag{1}$$

hay que prestar atención a que se cumpla la desigualdad $\alpha<\beta$, ya que de otro modo el sistema de desigualdades (1) resultará ser contradictorio.

Ahora, sea que cada cuadrante del círculo numérico está dividido en tres partes iguales (fig. 42). Hallemos la anotación analítica de los siguientes arcos: 1) $\cup B_1B_2$; 2) $\cup\Theta_1B_4$; 3) $\cup B_3A_1$; 4) $\cup A_2B_1$; 5) $\cup A_4\Theta_2$; 6) A_3B_2.

1) Analicemos el arco B_1B_2. Como cada uno de los arcos Θ_0A_1, A_1B_1, $B_1\Theta_1$, Θ_1A_2, ..., $B_4\Theta_0$ tiene una largura $\frac{\pi}{6}$, al realizar el primer recorrido positivo del círculo el punto B_1 corresponde al número $\frac{\pi}{3}$, el punto B_2, al número $\frac{5\pi}{6}$. Por consiguiente, la anotación analítica del arco B_1B_2, será:

$$\frac{\pi}{3}+2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6}+2\pi k.$$

2) $\cup\ \Theta_1B_4$: $\frac{\pi}{2}+2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6}+2\pi k.$

3) $\cup\ B_3A_1$: $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}+2\pi k$ $\left(\text{o bien } \frac{4\pi}{3}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{13\pi}{6}+2\pi n\right).$

OBSERVACIÓN. Otra vez llamamos la atención del lector a la necesidad de la verificación, al escribir los extremos de los arcos. P. ej., durante el primer recorrido del círculo numérico el punto B_3 corresponde al número $\frac{4\pi}{3}$; continuando el movimiento en el sentido del punto B_3 a A_1, al pasar por el punto Θ_0, comenzamos a recorrer el círculo por segunda vez, el punto A_1 corresponde al número $\frac{13\pi}{6}$. De aquí se obtiene la segunda anotación para el arco B_3A_1.

4) $\cup A_2B_1$: $-\frac{4\pi}{3}+2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}+2\pi k$ $\left(\text{o bien } \frac{2\pi}{3}+2\pi n \leqslant \right.$ $\left. \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{3}+2\pi n\right)$.

5) $\cup A_4\Theta_2$: $-\frac{\pi}{3}+2\pi k \leqslant x \leqslant \pi+2\pi k$ $\left(\text{o bien } \frac{5\pi}{3}+2\pi n \leqslant \right.$ $\left. \leqslant x \leqslant 3\pi+2\pi n\right)$.

6) $\cup A_3B_2$: $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6}+2\pi k$ $\left(\text{o bien } \frac{7\pi}{6}+2\pi n \leqslant \right.$ $\left. \leqslant x \leqslant \frac{17\pi}{6}+2\pi n\right)$.

EJEMPLO 1 Resolvamos la desigualdad

$$\operatorname{sen} x > \frac{1}{2}\ . \qquad (2)$$

SOLUCIÓN. Por definición, sen x es la ordenada del punto t del círculo Σ, correspondiente al número x. Marquemos en el círculo Σ los puntos que tienen la ordenada igual a $\frac{1}{2}$ (los puntos M y P en fig. 43). Entonces, los puntos cuya ordenada es mayor que $\frac{1}{2}$ llenan

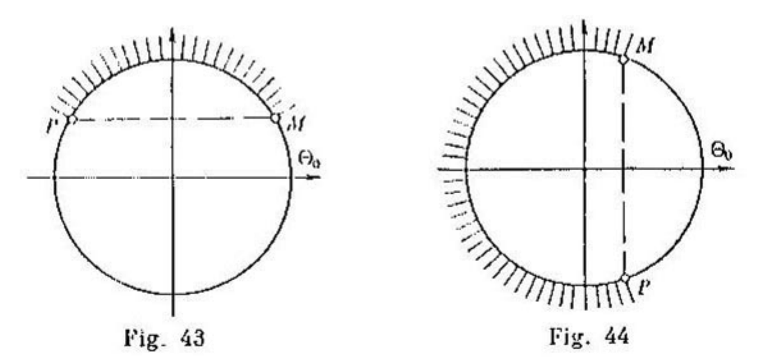


Fig. 43 Fig. 44

el arco abierto MP*. Es lógico que semejante arco reciba el nombre de solución geométrica de la desigualdad (2).

Confeccionemos la anotación analítica del arco abierto MP: $\frac{\pi}{6}+$ $+2\pi k < x < \frac{5\pi}{6}+2\pi k$. Esta es la solución de la desigualdad (2).

EJEMPLO 2. Resolvamos la desigualdad

$$\cos x < \frac{1}{3}\ . \qquad (3)$$

---

* Un arco sin puntos extremos será llamado *arco abierto*.

SOLUCIÓN. Por definición, $\cos x$ es la abscisa de los puntos $t \in \Sigma$ que corresponden al número x. Marquemos en el círculo numérico Σ los puntos que tienen abscisa igual a $\frac{1}{3}$ (los puntos M y P, en la fig. 44). Entonces, la solución geométrica de la desigualdad (3) será el arco abierto MP (los puntos de este arco tienen la abscisa menor que $\frac{1}{3}$). Confeccionemos la anotación analítica del arco abierto MP:

$$\arccos \frac{1}{3} + 2\pi k < x < 2\pi - \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k.$$

EJEMPLO 4. Resolvamos la desigualdad

$$\operatorname{tg} x \leqslant -\frac{1}{2}. \qquad (4)$$

SOLUCIÓN. $\operatorname{tg} x$ no está definida con $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$. A estos números corresponden los puntos Θ_1, y Θ_3 del círculo Σ (fig. 45). Marquemos en el semicírculo $\Theta_3\Theta_1$ el punto $M = M(x)$ tal que $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$. Como en el arco $\Theta_3\Theta_1$ (con mayor precisión, en cada uno de los intervalos de la recta numérica R que se aplican en el arco $\Theta_3\Theta_1$) la función $y = \operatorname{tg} x$ crece, la desigualdad $\operatorname{tg} x \leqslant -\frac{1}{2}$ se cumplirá para todos los puntos del arco $\Theta_3\Theta_1$ que yacen a partir del punto M en sentido negativo, o sea, en el arco semiabierto Θ_3M.

Como, más adelante, el período fundamental de la tangente es igual a π, la desigualdad (4) se cumplirá asimismo para todos los puntos del arco Θ_1P que se distingue del arco Θ_3M en la mitad del círculo.

Así, pues, la solución geométrica de la desigualdad (4) es la unión de dos arcos semiabiertos Θ_3M y Θ_1P. Confeccionemos la anotación analítica de los indicados arcos. Para el arco Θ_3M tenemos:

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x \leqslant -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2\pi k$$

y para el arco Θ_1P: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x \leqslant \pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2\pi k$.

Pero la solución de desigualdad (4) puede escribirse con mayor brevedad:

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leqslant -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n.$$

EJEMPLO 4. Resolvamos la desigualdad

$$\operatorname{ctg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}. \qquad (5)$$

SOLUCIÓN $\operatorname{ctg} x$ no está definida con $x = \pi k$. A estos números corresponden los puntos Θ_0 y Θ_2 del círculo numérico Σ (fig. 46). Marquemos en el semicírculo $\Theta_0\Theta_2$ el punto $M = M(x)$ tal que $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Con este fin, trazamos el arco $\Theta_0 M$, cuya largura es igual a $\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$. Como en el arco $\Theta_0\Theta_2$ la función $y = \operatorname{ctg} x$ decrece, la desigualdad $\operatorname{ctg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ se verificará para todos los

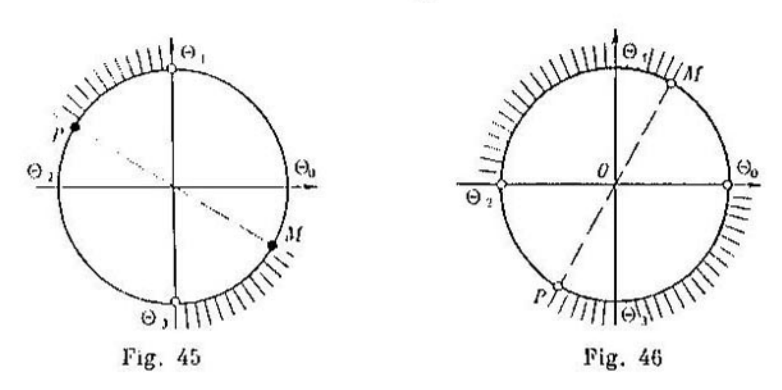


Fig. 45 Fig. 46

puntos del arco $\Theta_0\Theta_2$ que yacen desde el punto M en el sentido positivo, es decir, en el arco abierto $M\Theta_2$ (al resolver la desigualdad $\operatorname{ctg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ sería preciso tomar el arco abierto $\Theta_0 M$). Tomando en consideración que el período fundamental de la cotangente es igual a π, marquemos, además, el arco $P\Theta_0$, en el que se verifica la desigualdad (5) (ella se obtiene del arco $M\Theta_2$, girando en torno del punto O a 180°).

Así, pues, la solución geométrica de (5) es la unión de dos arcos abiertos $M\Theta_2$ y $P\Theta_0$. La anotación analítica del arco $M\Theta_2$ es la siguiente: $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \pi + 2\pi k$; la del arco $P\Theta_0$ se aduce a continuación: $\frac{4\pi}{3} + 2\pi k < x < 2\pi + 2\pi k$.

De forma más corta podemos escribir la solución de la desigualdad (5), así: $\frac{\pi}{3} + \pi k < x < \pi + \pi k$.

EJEMPLO 5. Resolvamos el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad (6)$$

Hallemos la solución geométrica de la desigualdad $\operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ (el arco MP del círculo Σ en la fig. 47 está sombreado por su interior). En ese mismo círculo hallemos la solución geométrica de la desigualdad $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (el correspondiente arco EK está sombreado en la fig. 47 por su parte exterior). Entonces, la solución geométrica

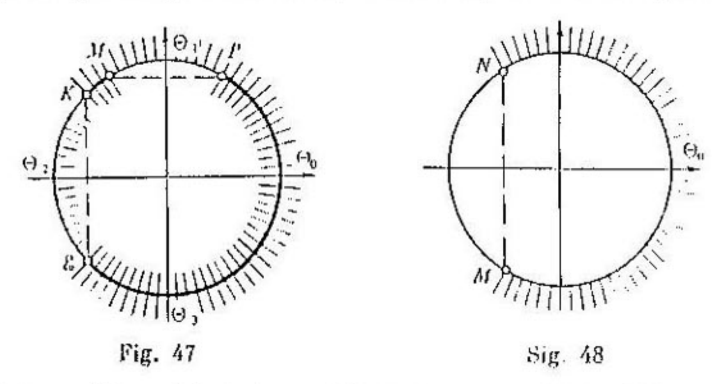


Fig. 47 Sig. 48

del sistema (6) será la intersección de los arcos MP y EK, es decir, la unión de dichos arcos. Sólo nos queda confeccionar la anotación analítica de los mencionados arcos. Para el arco MK, tenemos:

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi k;$$

para el arco EP, tenemos

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

EJEMPLO 6. Resolvamos la desigualdad

$$2\operatorname{sen}^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3}\cos 2x > 0. \tag{7}$$

SOLUCIÓN. Aplicando la fórmula $1 - \cos 2\alpha = 2\operatorname{sen}^2\alpha$ transformemos (7) a la forma:

$$1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3}\cos 2x > 0$$

y, seguidamente,

$$-\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3}\cos 2x > -1, \quad \operatorname{sen} 2x + \sqrt{3}\cos 2x > -1,$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x > -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\operatorname{sen} 2x + \cos\frac{\pi}{6}\cos 2x > -\frac{1}{2},$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) > -\frac{1}{2}. \tag{8}$$

Resolvamos la desigualdad (8). Haciendo $t=\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ obtenemos la desigualdad $\cos t>-\frac{1}{2}$, cuya solución se obtiene con ayuda del círculo numérico (fig. 48): $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k<t<\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. Retornando a la variable x, obtenemos: $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k<2x-\frac{\pi}{6}<$ $<\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, de donde $-\frac{\pi}{4}+\pi k<x<\frac{5\pi}{12}+\pi k$ es la solución de la desigualdad (8) y, por lo tanto, la de (7).

EJEMPLO 7. Resolvamos la desigualdad

$$6\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen} x\cos x-\cos^2 x>2. \tag{9}$$

SOLUCIÓN. Como $2=2(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x)$, transformemos (9) a la forma:

$$4\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen} x\cos x-3\cos^2 x>0. \tag{10}$$

Ya que $\cos^2 x\geqslant 0$, la desigualdad (10) es equivalente al siguiente conjunto de sistemas:

$$\begin{cases}\cos^2 x=0\\ 4\operatorname{sen}^2 x>0\end{cases};\quad \begin{cases}\cos^2 x>0\\ 4\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x-3>0.\end{cases} \tag{11}$$

El primer sistema del conjunto (11) tiene la solución: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$.

El segundo sistema de (11) es equivalente al siguiente sistema:

$$\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\\ (\operatorname{tg} x-1)\left(\operatorname{tg} x+\frac{3}{4}\right)<0\end{cases}$$

que a su vez es equivalente al conjunto de desigualdades:

$$\operatorname{tg} x<-\frac{3}{4};\ \operatorname{tg} x>1. \tag{12}$$

Sig. 49

Hallemos la solución de (12). La solución geométrica de la desigualdad $\operatorname{tg} x>1$ es la unión de los arcos abiertos $M\Theta_1$ y $N\Theta_3$ (en la fig. 49 está sombreada por el interior), la solución geométrica de la desigualdad $\operatorname{tg} x<-\frac{3}{4}$ es la unión de los arcos abiertos Θ_1L y Θ_3K (sombreada por el exterior). La solución geométrica del conjunto (12) es la unión de cuatro arcos $M\Theta_1$, $N\Theta_3$, Θ_1L, Θ_3K.

Como, a continuación, la solución geométrica del primer sistema del conjunto (11) es el conjunto de dos elementos $\{\Theta_1, \Theta_3\}$, la solución geométrica del conjunto (11) es la unión de dos arcos ML y NK. Confeccionemos la anotación analítica del arco ML: $\frac{\pi}{4}+2\pi k<$ $< x<\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+2\pi k$.

Tomando en consideración que el arco NK se obtiene del arco ML girando alrededor del punto O a 180°, es posible no confeccionar la anotación analítica del arco NK, sino que de inmediato escribir la solución del conjunto de sistemas (12) en la forma:

$$\frac{\pi}{4}+\pi k<x<\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi k.$$

Esta es la solución de la desigualdad (9).

EJEMPLO 8. Resolvamos la desigualdad

$$\operatorname{sen} x+\cos x<\frac{1}{\operatorname{sen} x}. \tag{13}$$

SOLUCIÓN. Consecutivamente, tenemos

$$\operatorname{sen} x+\cos x-\frac{1}{\operatorname{sen} x}<0;\ \frac{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x\cos x-1}{\operatorname{sen} x}<0;$$

$$\frac{\operatorname{sen} x\cos x-\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}<0;\ \frac{\cos x(\operatorname{sen} x-\cos x)}{\operatorname{sen} x}<0. \tag{14}$$

Hagamos uso de la identidad $\operatorname{sen} x=\operatorname{tg} x\cos x$. En el caso dado, esto estrecha el campo de definición de la desigualdad, pero no conduce a la pérdida de raíces, ya que los valores de x con los que $\cos x=0$ no son soluciones de la desigualdad (14).

La desigualdad (14) se transforma a la forma

$$\frac{\cos^2 x(\operatorname{tg} x-1)}{\operatorname{sen} x}<0 \text{ y, a continuación, } \frac{\operatorname{tg} x-1}{\operatorname{sen} x}<0. \tag{15}$$

La desigualdad obtenida es equivalente al siguiente conjunto de sistemas de desigualdades:

$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}\operatorname{tg} x>1\\ \operatorname{sen} x<0\end{cases} & (16)\\ \begin{cases}\operatorname{tg} x<1\\ \operatorname{sen} x>0.\end{cases} & (17)\end{array}\right.$$

Resolvamos el sistema (16). En la fig. 50 se muestra la unión de los arcos $P\Theta_3$ y $M\Theta_1$ que es la solución geométrica de la desigualdad $\operatorname{tg} x>1$, mientras que el arco $\Theta_2\Theta_0$, la solución geométrica de la

desigualdad sen $x < 0$. La solución geométrica del sistema (16) es el arco $P\Theta_3$, su anotación analítica tiene el aspecto:

$\frac{5\pi}{4} + 2\pi k \leqslant x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$. Esta es la solución del sistema (16).

Resolvamos el sistema (17). De la fig. 51 se deduce que su solución geométrica es el conjunto de arcos $\Theta_0 M$ y $\Theta_1\Theta_2$. La anotación analítica tiene la forma:

$$2\pi k < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \pi + 2\pi k.$$

Es decir, la solución del conjunto de sistemas (16) y (17) y, simultáneamente, la solución de la igualdad (13) es la siguiente:

$$\frac{5\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k; \quad 2\pi k < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi k.$$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant x < \pi + 2\pi k.$$

En conclusión señalemos que no siempre es posible resolver un sistema o bien un conjunto de desigualdades trigonométricas con ayu-

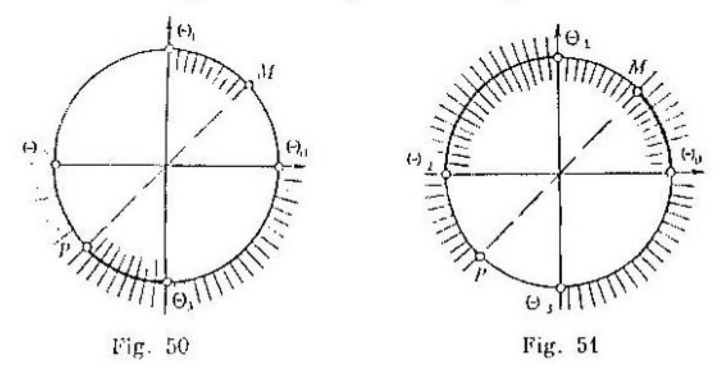


Fig. 50 Fig. 51

da del círculo numérico. P. ej., así sucede en aquellos casos cuando el mínimo común múltiplo de los períodos fundamentales de todas las funciones que entran en las desigualdades que componen el sistema o conjunto dado, es mayor que la longitud del círculo numérico, es decir, mayor que 2π. En semejantes casos, en lugar del círculo numérico se hace uso de la recta numérica.

EJERCICIOS

Resuelvan las siguientes desigualdades más sencillas:

1604. 1) $\operatorname{sen} x > -\frac{1}{2}$; 2) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\operatorname{tg} x \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

4) $\operatorname{ctg} x \leqslant -1$.

1605. 1) $\operatorname{sen} x < \frac{1}{5}$; 2) $\cos x \geqslant -0{,}7$; 3) $\operatorname{tg} x \leqslant 5$; 4) $\operatorname{ctg} x > -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Resuelvan los siguientes sistemas de desigualdades:

1606. $\begin{cases} \operatorname{sen} x < \frac{1}{2} \\ \cos x < \frac{1}{2}. \end{cases}$ 1607. $\begin{cases} \operatorname{sen} x > -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tg} x \leqslant 0. \end{cases}$

1608. $\begin{cases} \cos x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{ctg} x > -\sqrt{3}. \end{cases}$ 1609. $\begin{cases} \operatorname{tg} x < 1 \\ \operatorname{ctg} x \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$

1610. $\begin{cases} \operatorname{sen} x > \frac{1}{5} \\ \cos x < \frac{1}{5}. \end{cases}$ 1611. $\begin{cases} \cos x \geqslant -\frac{3}{5} \\ \operatorname{tg} x < 3. \end{cases}$

1612. $\begin{cases} \operatorname{sen} x < \frac{4}{7} \\ \operatorname{ctg} x < 2. \end{cases}$ 1613. $\begin{cases} \operatorname{tg} x > 0{,}23 \\ \operatorname{ctg} x \leqslant 0{,}3. \end{cases}$

Resuelvan los siguientes conjuntos de desigualdades:

1614. $\operatorname{sen} x > \frac{2}{3}$; $\cos x < 0$. 1615. $\cos x < \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} x > -3{,}5$.

1616. $\operatorname{sen} x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{ctg} x \leqslant 7$. 1617. $\operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{ctg} x < \sqrt{2}$.

Resuelvan las siguientes desigualdades:

1618. $\cos x^2 \geqslant \frac{1}{2}$. 1619. $\sqrt{3} \operatorname{sen} 2x + \cos 2x < 1$.

1620. $\cos 3x + \sqrt{3} \operatorname{sen} 3x < -\sqrt{2}$. 1621. $\cos 2x + \cos x > 0$.

1622. $\frac{\cos x}{1 + \cos 2x} < 0$. 1623. $\operatorname{sen} 3x > \cos 3x$.

1624. $\operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x - 4 > 0$. 1625. $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 2 < 0$

1626. $2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos 2x < 0$.

1627. $\operatorname{tg}^3 x + 3 > 3 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x$. 1628. $\frac{\operatorname{sen} 3x - \cos 3x}{\operatorname{sen} 3x + \cos 3x} < 0$.

1629. $5 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x \cos x - 36 \cos^2 x > 0$.

1630. $2 \operatorname{sen}^2 x - 4 \operatorname{sen} x \cos x + 9 \cos^2 x > 0$.

1631. $\cos^2 x + 3 \operatorname{sen}^2 x + 2\sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x < 1$.

1632. $3 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} 2x - \cos^2 x \geqslant 2$. 1633. $\sqrt{3} \cos^{-2} x < 4 \operatorname{tg} x$.

1634. $\operatorname{sen} 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x > 1$. 1635. $2 + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x < 0$.

1636. $2 \cos x (\cos x - \sqrt{8} \operatorname{tg} x) < 5$. 1637. $\operatorname{sen} x + \cos x < \frac{1}{\cos x}$.

1638. $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x < \frac{7}{16}$. 1639. $\operatorname{ctg} x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x - 2} \geqslant 0$.

1640. $\cos^2 2x + \cos^2 x \leqslant 1$. 1641. $8 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + 3 \operatorname{sen} x - 4 > 0$.

1642. $\operatorname{sen} x + \cos x > \sqrt{2} \cos 2x$. 1643. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x > 0$.

1644. $\cos 2x \cos 5x < \cos 3x$.

1645. $\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x - \cos 2x \cos 3x > \operatorname{sen} 10x$.

1646. $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2 \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > 0$.

1647. $2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x < 1$.

1648. $4 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x > \operatorname{sen} 4x$.

1649. $\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} \geqslant 3 \operatorname{tg} x$. 1650. $3 \cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x < \frac{1}{2}$.

1651. $\frac{\cos x + 2\cos^2 x + \cos 3x}{\cos x + 2\cos^2 x - 1} > 1$.

Resuelvan los siguientes sistemas de desigualdades:

1652. $\begin{cases} \cos x < 0 \\ \operatorname{sen} \frac{3}{5} x > 0. \end{cases}$ 1653. $\begin{cases} \operatorname{sen} \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \\ \cos 2x > -\frac{1}{2}. \end{cases}$

§ 7. Ecuaciones y desigualdades con parámetros

EJEMPLO 1. Resolvamos la ecuación

$$\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = a. \quad (1)$$

SOLUCIÓN. Empleando la fórmula de reducción de la potencia, obtenemos:

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = a$$

y, seguidamente,

$$\cos^2 2x = 2a - 1. \quad (2)$$

Hallemos los valores de control del parámetro (véase la pág. 186). En nuestro caso, ellos son aquellos valores del parámetro con los que el segundo miembro de la ecuación es igual a 0 o bien a 1 (si $2a - 1 < 0$ o bien $2a - 1 > 1$, la ecuación no tiene soluciones). Si $2a - 1 = 0$, $a = \frac{1}{2}$; si $2a - 1 = 1$, $a = 1$.

Así, pues, examinemos la ecuación (2) en cada uno de los cinco casos siguientes: 1) $a < \frac{1}{2}$; 2) $a = \frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2} < a < 1$; 4) $a = 1$; 5) $a > 1$.

1) Si $a < \frac{1}{2}$, $2a - 1 < 0$ y la ecuación (2) no tiene raíces.

2) Si $a=\frac{1}{2}$, la ecuación (2) toma la forma $\cos^2 2x=0$, de donde hallamos $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$.

3) Si $\frac{1}{2}<a<1$, $0<2a-1<1$. Transformemos la ecuación (2) a la forma: $\frac{1+\cos 4x}{2}=2a-1$ y, a continuación, $\cos 4x=$ $=4a-3$. Como en el caso que analizamos $\frac{1}{2}<a<1$, $2<4a<$ <4 y, entonces, $-1<4a-3<1$. O sea, la ecuación $\cos 4x=$ $=4a-3$ tiene la solución $4x=\pm\arccos(4a-3)+2\pi k$, de donde

$$x=\pm\frac{1}{4}\arccos(4a-3)+\frac{\pi}{2}k. \qquad (3)$$

4) Si $a=1$, la ecuación (2) toma la forma $\cos^2 2x=1$. De ésta, hallamos $x=\frac{\pi}{2}k$.

5) Si $a>1$, $2a-1>1$ y la ecuación (2) no tiene raíces.

Señalemos que si $a=\frac{1}{2}$ o bien $a=1$, la solución también puede ser escrita en la forma (3).

RESULTADO. 1) si $a<\frac{1}{2}$; $a>1$, no hay raíces;

2) si $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$, $x=\pm\frac{1}{4}\arccos(4a-3)+\frac{\pi}{2}k$.

EJEMPLO 2. Resolvamos la ecuación

$$(a-1)\operatorname{sen}^2 x-2(a+1)\operatorname{sen} x+2a-1=0. \qquad (4)$$

SOLUCIÓN. Hagamos $y=\operatorname{sen} x$, entonces la ecuación (4) toma la forma

$$(a-1)y^2-2(a+1)y+2a-1=0. \qquad (5)$$

El primer valor de control del parámetro a será $a=1$ que reduce a cero el coeficiente de y^2.

Con $a=1$ la ecuación (5) toma la forma $-4y+1=0$, de donde hallamos $y=\frac{1}{4}$, o sea, $\operatorname{sen} x=\frac{1}{4}$ y, por lo tanto,

$$x=(-1)^k\arcsen\frac{1}{4}+\pi k.$$

Examinemos ahora el caso cuando $a\neq 1$. Hallemos el discriminante de la ecuación (5). Tenemos: $\frac{D}{4}=(a+1)^2-(a-1)\times$ $\times(2a-1)=-a^2+5a$.

Los segundos valores de control del parámetro a serán aquellos valores con los que $D = 0$. Éstos corresponderán a los valores $a = 0$, $a =$ Señalemos que $D < 0$ si $a < 0$ o bien $a > 5$ y $D \geqslant 0$ si $0 \leqslant a \leqslant 5$.

Así, pues, necesitamos considerar la ecuación (5) en cada uno de los casos: $a < 0$; $\begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant 5 \\ a \neq 1 \end{cases}$; $a > 5$.

Si $a < 0$ o bien $a > 5$, la ecuación (5) no tiene raíces.

En el caso $\begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant 5 \\ a \neq 1 \end{cases}$ la ecuación cuadrática tiene las raíces reales

$$y_{1,2} = \frac{a+1 \pm \sqrt{5a-a^2}}{a-1}.$$

Como $y = \operatorname{sen} x$, deben cumplirse las siguientes desigualdades: $-1 \leqslant y_1 \leqslant 1$, $-1 \leqslant y_2 \leqslant 1$.

Es fácil advertir que $y_1 = \frac{a+1+\sqrt{5a-a^2}}{a-1}$ satisface la desigualdad doble $-1 \leqslant y_1 \leqslant 1$ sólo con $a=0$. En efecto, si $a=0$, $y=-1$; si $a>0$, $|a+1| > |a-1|$ y, más aún, $|a+1+\sqrt{5a-a^2}| > |a-1|$, es decir, $|y_1| > 1$.

Si $a = 0$, la ecuación $\operatorname{sen} x = y_1$ toma la forma $\operatorname{sen} x = -1$, de donde hallamos $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Ahora, hemos de buscar los valores del parámetro a (del conjunto que consideramos $\begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant 5), \\ a \neq 1 \end{cases}$ los que satisfacen el sistema de desigualdades $-1 \leqslant y_2 \leqslant 1$, es decir, el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{a+1-\sqrt{5a-a^2}}{a-1} \geqslant -1 \\ \dfrac{a+1-\sqrt{5a-a^2}}{a-1} \leqslant 1. \end{cases} \tag{6}$$

A su vez, el sistema (6) es equivalente al siguiente conjunto de sistemas de desigualdades:

$$\begin{cases} a-1>0 \\ a+1-\sqrt{5a-a^2} \geqslant 1-a; \\ a+1-\sqrt{5a-a^2} \leqslant a-1 \end{cases} \quad \begin{cases} a-1<0 \\ a+1-\sqrt{5a-a^2} \leqslant 1-a \\ a+1-\sqrt{5a-a^2} \geqslant a-1. \end{cases} \tag{7}$$

Resolvamos el primer sistema del conjunto (7). Tenemos:

$$\begin{cases} a > 1 \\ \sqrt{5a-a^2} \leqslant 2a \\ \sqrt{5a-a^2} \geqslant 2 \end{cases} \quad \text{y, a continuación,} \quad \begin{cases} a > 1 \\ 5a-a^2 \leqslant 4a^2 \\ 5a-a^2 \geqslant 4, \end{cases}$$

de donde hallamos $1 < a \leqslant 4$.

Resolvamos el segundo sistema del conjunto (7). Tenemos:

$$\begin{cases} a < 1 \\ \sqrt{5a-a^2} \geqslant 2a \\ \sqrt{5a-a^2} \leqslant 2 \end{cases} \quad \text{y, seguidamente, (ya que } a \geqslant 0) \quad \begin{cases} a < 1 \\ 5a-a^2 \geqslant 4a^2 \\ 5a-a^2 \leqslant 4, \end{cases}$$

de donde hallamos $0 \leqslant a < 1$.

Así, pues, el conjunto de sistemas (7) y, por consiguiente, el sistema (6) también, tienen las soluciones: $0 \leqslant a < 1$; $1 < a \leqslant 4$. Esto quiere

decir que en el conjunto $\begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant 5 \\ a \neq 1 \end{cases}$ la ecuación

$$\operatorname{sen} x = \frac{a+1-\sqrt{5a-a^2}}{a-1} \tag{8}$$

sólo tiene solución en el caso cuando $\begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant 4 \\ a \neq 1. \end{cases}$ Dicha solución

es la siguiente: $x = (-1)^k \arcsen \frac{a+1-\sqrt{5a-a^2}}{a-1} + \pi k$. Señalemos que esta anotación asimismo contiene el caso considerado si $a=0$.

Si $4 < a \leqslant 5$, la ecuación (8) y, junto con ella la (4), no tienen raíces.

RESULTADO: 1) si $a=1$, $x = (-1)^k \arcsen \frac{1}{4} + \pi k$.

2) si $\begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant 4 \\ a \neq 1 \end{cases}$, $x = (-1)^k \arcsen \frac{a+1-\sqrt{5a-a^2}}{a-1} + \pi k$;

3) si $a < 0$; $a > 4$, la ecuación (4) no tiene raíces.

EJEMPLO 3. Resolvamos la ecuación

$$\cos(a+x) = \frac{\cos a}{\cos x}. \tag{9}$$

SOLUCIÓN. Multiplicando ambos miembros de la ecuación (9) por $\cos x$, obtenemos: $\cos x \cos(a+x) = \cos a$ y, más adelante,

$$\cos(x+a+x) + \cos(x-a-x) = 2\cos a,$$

es decir,

$$\cos(2x+a) = \cos a. \tag{10}$$

De la ecuación (10) hallamos:

$$x = \pi k; \quad x = -a + \pi k. \tag{11}$$

VERIFICACIÓN. En el proceso de resolución de la ecuación (9) hemos multiplicado sus dos miembros por $\cos x$, lo que condujo a la ampliación del campo de definición de la ecuación y, por lo tanto, pudo llevar a la aparición de raíces ajenas. Del conjunto hallado de familias de soluciones de (10), elijamos aquellas familias que son la solución de la ecuación (9). Con este fin, eliminamos del conjunto de familias (11) los valores de x con los que $\cos x = 0$, es decir, los valores de $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Es evidente que las familias $x = \pi k$ y $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ no se cruzan. Suponiendo, a continuación, que $-a + \pi k = \frac{\pi}{2} + \pi n$, hallamos $a = \frac{\pi}{2}(-1 - 2k + 2n)$. Esto significa que la familia $x = a + \pi k$ es la solución de (9) sólo con los valores de $a \neq \frac{\pi}{2}(2n - 2k - 1)$ o bien, con brevedad, $a \neq \frac{\pi}{2}(2l - 1)$, donde $l = n - k$ ($l = 0; \ \pm 1; \ \pm 2; \ \ldots$).

RESULTADO: 1) si $a = \frac{\pi}{2}(2l - 1)$, $x = \pi k$;

2) si $a \neq \frac{\pi}{2}(2l - 1)$, $x = \pi k$; $x = -a + \pi k$.

EJEMPLO 4. Resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \cos y = a^2 \\ \operatorname{sen} y \cos x = a. \end{cases} \tag{12}$$

SOLUCIÓN. Sustituyendo la primera ecuación del sistema (12) por la suma y la segunda, por la diferencia de la primera y segunda ecuaciones, obtenemos un sistema equivalente al (12):

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x = a^2 + a \\ \operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x = a^2 - a \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} \operatorname{sen}(x + y) = a^2 + a \\ \operatorname{sen}(x - y) = a^2 - a. \end{cases} \tag{13}$$

Es evidente que el sistema (13) tiene soluciones cuando el parámetro a satisface los siguientes sistemas de desigualdades:

$$\begin{cases} |a^2 + 2| \leqslant 1 \\ |a^2 - a| \leqslant 1. \end{cases} \tag{14}$$

El sistema (14) es equivalente a semejante sistema:

$$\begin{cases} a^2+a\leqslant 1\\ a^2+a\geqslant -1\\ a^2-a\leqslant 1\\ a^2-a\geqslant -1\end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} a^2+a-1\leqslant 0\\ a^2+a+1\geqslant 0\\ a^2-a-1\leqslant 0\\ a^2-a+1\geqslant 0.\end{cases} \qquad (15)$$

La segunda y cuarta desigualdades de (15) se realizan con toda a, ya que los trinomios de segundo orden, contenidos en los primeros miembros de dichas desigualdades, tienen discriminante negativo y coeficiente mayor positivo. O sea, el sistema (15) es equivalente al siguiente sistema:

$\begin{cases} a^2+a-1\leqslant 0\\ a^2-a-1\leqslant 0\end{cases}$ que al resolverlo, hallamos:

$$-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leqslant a\leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Sólo con estos valores del parámetro a tiene solución el sistema (13).

Así, pues, $-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leqslant a\leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Del sistema (13) obtenemos:

$$\begin{cases} x+y=(-1)^k \text{ arcsen } (a^2+a)+\pi k,\\ x-y=(-1)^n \text{ arcsen } (a^2-a)+\pi n\end{cases}$$

y, a continuación,

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}((-1)^k \text{ arcsen } (a^2+a)+(-1)^n \text{ arcsen } (a^2-a)+\pi k+\pi n),\\ y=\frac{1}{2}((-1)^k \text{ arcsen } (a^2+a)-(-1)^n \text{ arcsen } (a^2-a)+\pi k-\pi n).\end{cases}$$

RESULTADO: 1) si $a<-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $a>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, no hay soluciones;

2) si $-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leqslant a\leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, entonces

$$\begin{cases} x=\frac{\alpha+\beta+\pi(k+n)}{2}\\ y=\frac{\alpha-\beta+\pi(k-n)}{2},\end{cases}$$

donde $\alpha=(-1)^k$ arcsen (a^2+a), $\beta=(-1)^n$ arcsen (a^2-a).

EJEMPLO 5 Resolvamos la desigualdad

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \leqslant a. \qquad (16)$$

SOLUCIÓN. Transformemos la desigualdad (16) a la forma

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \leqslant a \text{ y, después, } \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x \operatorname{sen} x} \leqslant a$$

o sea,

$$\frac{2}{\operatorname{sen} 2x} \leqslant a. \qquad (17)$$

Hagamos $y = \operatorname{sen} 2x$. Entonces, (17) tomará la forma $\frac{2}{y} \leqslant a$ y el problema se reduce a resolver el siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} \frac{2}{y} \leqslant a \\ -1 \leqslant y \leqslant 1, \end{cases} \quad \text{es decir,} \quad \begin{cases} \frac{ay-2}{y} \geqslant 0 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases} \qquad (18)$$

Señalemos que $a = 0$ es el valor de control del parámetro a. Así, pues, tenemos que analizar tres casos: 1) $a = 0$; 2) $a > 0$; 3) $a < 0$.

1) Si $a = 0$, el sistema (18) toma la forma $\begin{cases} -\frac{2}{y} \geqslant 0 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$, de donde hallamos $-1 \leqslant y < 0$.

2) Si $a > 0$, el sistema (18) transforma a la forma $\begin{cases} \frac{y - \frac{2}{a}}{y} \geqslant 0 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1, \end{cases}$ de donde hallamos:

$$\begin{cases} y < 0, \ y \geqslant \frac{2}{a} \\ -1 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases} \qquad (19)$$

Aquí, el valor de control del parámetro es $a = 2$, por lo que hay que considerar tres casos: a) $0 < a < 2$; b) $a = 2$; c) $a > 2$.

a) Si $0 < a < 2$, $\frac{2}{a} > 1$ y el sistema (19) tiene la siguiente solución: $-1 \leqslant y < 0$;

b) si $a = 2$, el sistema (19) tiene la siguiente solución:

$$-1 \leqslant y < 0; \quad y = 1;$$

c) si $a > 2$, el sistema (19) tiene la siguiente solución:

$$-1 \leqslant y < 0; \ \frac{2}{a} \leqslant y \leqslant 1.$$

3) Si $a<0$, el sistema (18) se transforma así $\begin{cases} \dfrac{y-\frac{2}{a}}{y} \leqslant 0 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1, \end{cases}$

y, a continuación, $\begin{cases} \frac{2}{a} \leqslant y < 0 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$ (20)

Aquí, el valor de control del parámetro es $a = -2$. Por esta causa hay que analizar tres casos: a) $a < -2$; b) $a = -2$; c) $-2 < a < 0$.

a) Cuando $a < -a$ tenemos $\frac{2}{a} > -1$ y del sistema (20) hallamos $\frac{2}{a} \leqslant y < 0$.

b) En el caso $a = 2$ del sistema (20) hallamos $-1 \leqslant y < 0$.

c) Por fin, cuando $-2 < a < 0$ tenemos $\frac{2}{a} < -1$ y el sistema (20) ofrece la siguiente solución: $-1 \leqslant y < 0$.

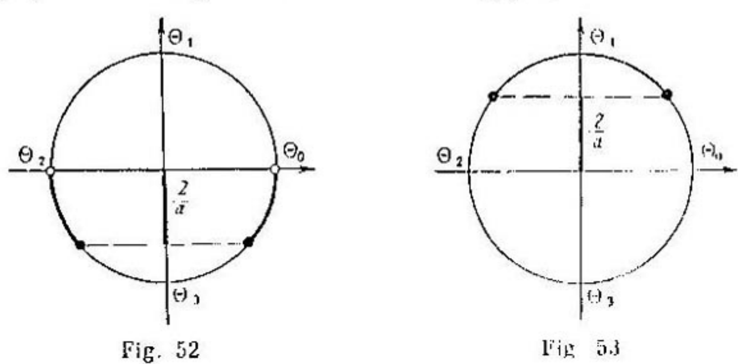


Fig. 52 Fig. 53

Resumiendo, obtenemos la siguiente solución del sistema (18):

1) si $a < -2$, $\frac{2}{a} \leqslant y < 0$;

2) si $-2 \leqslant a < 2$, $-1 \leqslant y < 0$;

3) si $a = 2$, $-1 \leqslant y < 0$; $y = 1$;

4) si $a > 2$, $-1 \leqslant y < 0$; $\frac{2}{a} \leqslant y \leqslant 1$.

Como $y = \operatorname{sen} 2x$, obtenemos:

1. Si $a < -2$, $\frac{2}{a} \leqslant \operatorname{sen} 2x \leqslant 0$, de donde (fig. 52)

$$2\pi k + \pi < 2x \leqslant \pi + \operatorname{arcsen}\left(-\frac{2}{a}\right) + 2\pi k;$$

$$2\pi k + \operatorname{arcsen}\frac{2}{a} \leqslant 2x < 2\pi k,$$

por lo tanto,

$\pi k + \frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} \frac{2}{a} + \pi k$; $\pi k + \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} \frac{2}{a} \leqslant x < \pi k$.

2. Si $-2 \leqslant a < 2$, $-1 \leqslant \operatorname{sen} 2x < 0$, de donde

$$2\pi k - \pi < 2x < 2\pi k,$$

por lo que $\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \pi k$.

3. Si $a = 2$, del sistema de desigualdades $-1 \leqslant \operatorname{sen} 2x < 0$, obtenemos: $\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \pi k$ y de la ecuación sen $2x = 1$ hallamos:

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k.$$

4. Si $a > 2$, del sistema de desigualdades $-1 \leqslant \operatorname{sen} 2x < 0$, hallamos (como más arriba) $\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \pi k$ y del sistema $\frac{2}{a} \leqslant \operatorname{sen} 2x \leqslant 1$, tenemos (fig. 53):

$$2\pi k + \operatorname{arcsen} \frac{2}{a} \leqslant 2x \leqslant \pi - \operatorname{arcsen} \frac{2}{a} + 2\pi k,$$

de donde $\pi k + \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} \frac{2}{a} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} \frac{2}{a} + \pi k$.

RESULTADO 1) si $a < -2$, $\pi k + \frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{\pi}{2} - \alpha + \pi k$; $\pi k + \alpha \leqslant x < \pi k$;

2) si $-2 \leqslant a < 2$, $\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \pi k$; 3) si $a = 2$, $\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \pi k$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$; 4) si $a > 2$, $\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \pi k$; $\pi k + \alpha \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} - \alpha + \pi k$, donde $\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} \frac{2}{a}$.

EJERCICIOS

Resuelvan las ecuaciones:

1654. $\cos 2x - \cos 4x = a \operatorname{sen} x$.

1655. $12 \operatorname{sen} x + 4\sqrt{3} \cos(\pi + x) = a\sqrt{3}$.

1656. $\operatorname{sen}(x - a) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} a$. 1657. $\operatorname{sen}(a + x) + \operatorname{sen} x = \cos \frac{a}{2}$.

1658. $a(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = b \cos 2x$.

1659. $(a - 1) \cos x + (a + 1) \operatorname{sen} x = 2a$.

1660. $\operatorname{sen}(x + a) + \cos(x + a) = \operatorname{sen}(x - a) + \cos(x - a)$.

1661. $1+\operatorname{sen}^2 ax=\cos x$. 1662. $\operatorname{sen}^6 x+\cos^6 x=a$.
1663. $\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x+\operatorname{sen} 2x+a=0$. 1664. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} a+1=\operatorname{tg} x \operatorname{tg} a$
1665. $a\cos^2\frac{x}{2}-(a+2b)\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}=a\cos x-b\operatorname{sen} x$. 1666. $\frac{\operatorname{tg} ax}{\operatorname{sen} bx}=0$.
1667. $\operatorname{sen} 3x=a\operatorname{sen} x$. 1668. $\cos 3x=a\cos x$.
1669. $2\cos(a+x)=\frac{\cos a}{\cos x}$. 1670. $\operatorname{sen}(x+a)=\frac{\cos a}{\operatorname{sen} x}$.
1671. $\cos x-\operatorname{sen} a+2\cos 3x\operatorname{sen}(a-3x)=0$.
1672. $a^2-2a+\frac{1}{\cos^2\pi(a+x)}=0$. 1673. $\operatorname{sen} x+2\cos ax=3$.
1674. $\operatorname{sen}^2 x+4\operatorname{sen} x+a=0$. 1675. $\cos^2 x-3\cos x+a=0$.
1676. $\operatorname{sen}^4 x-2\cos^2 x+a^2=0$. 1677. $\frac{a+\operatorname{sen} x}{a\cos x+1}=\frac{a+\cos x}{a\operatorname{sen} x+1}$.
1678. $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)=0$.
1679. $\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} a\operatorname{tg} x+1=0$. 1680. $\operatorname{sen} x\operatorname{tg} x+2\cos x=a$.
1681. $\operatorname{sen} a\operatorname{tg}^2 x-2\cos a\operatorname{tg} x+1=0$.
1682. $\operatorname{arctg} a-\operatorname{arctg}\frac{a-1}{a+1}=\operatorname{arctg} x$.
1683. $\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x+1}=\operatorname{arctg} a$.
1684. $\operatorname{sen} 3x+\operatorname{sen} 2x=a\operatorname{sen} x$.
1685. $(\operatorname{sen} x+\cos x)\operatorname{sen} 2x=a(\operatorname{sen}^3 x+\cos^3 x)$.
1686. $\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen} x\cos x-2\cos^2 x=a$.

Resuelvan los sistemas de ecuaciones:

1687. $\begin{cases}\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=a\\ x+y=b.\end{cases}$ 1688. $\begin{cases}\cos x-\cos y=a\\ x+y=b.\end{cases}$

1689. $\begin{cases}\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y=a\\ x+y=b.\end{cases}$ 1690. $\begin{cases}\operatorname{sen} x\cos y=a\\ x+y=b.\end{cases}$

1691. $\begin{cases}\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 y=a\\ x+y=b.\end{cases}$ 1692. $\begin{cases}\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y=a\\ \cos x\cos y=3a.\end{cases}$

1693. $\begin{cases}\operatorname{sen} x\cos y=2a\\ \cos x\operatorname{sen} y=a.\end{cases}$ 1694. $\begin{cases}\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} y=a\\ x+y=b.\end{cases}$

1695. $\begin{cases}\operatorname{sen} x\cos 2y=a^2+1\\ \cos x\operatorname{sen} 2y=a.\end{cases}$

1696. $\begin{cases}x-y=a\\ 2(\cos 2x+\cos 2y)=1+4\cos^2(x-y).\end{cases}$

1697. $\begin{cases}\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=a\\ \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y=-2a^2.\end{cases}$

Resuelvan las siguientes desigualdades:

1698. $\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\cos x}+\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\leqslant a$ 1699. $\frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\cos x}+\frac{1-\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\leqslant a$.

1700. $\cos x-\frac{1}{\cos x}\leqslant a$.

Soluciones

1. $(a-1)(a+1)(a^2+1)$. 2. $(a-1)(a+1)(a^2+a+1)(a^2-a+1)$ 3. $(a^2+1)\times(a^2+a\sqrt{3}+1)(a^2-a\sqrt{3}+1)$. 4. $(a-3)^2(a+3)^2$. 5. $(a-1)^2(a+1)^2(a^2+a+1)^2(a^2-a+1)^2$. 6. $(a-1)(a^2+1)(a^2+a+1)$. 7. $(a-1)(a+1)^3$. 8. $(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)$. 9. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$. 10. $(a+1)(a-1)(a^2+5)$. 11. $(a^2+1)(4a^2+1)$. 12. $(c-1)(c+1)(c^2-ab)$. 13. $(a^2+6a+18)(a^2-6a+18)$. 14. $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$. 15. $(a^2+a+1)\times(a^2-a+1)(a^2+a\sqrt{3}+1)(a^2-a\sqrt{3}+1)$. 16. $(a^2+1)(2a^2+a+2)$. 17. $(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})(a^2+3a+6)$. 18. $a(a+1)(a^2+a+7)$. 19. $(a-1)(a^2+1)(a^2+a+1)$. 20. $(a+2b)(2b-c)(a-c)$. 21. $(a+b)(b+c)(c+a)$. 22. $(a-2c)\times(b-2c)(a+b)$. 23. $a(a-1)(a+1)(a-2)(a+2)(a-3)(a+3)$. 24. $5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)$. 25. $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$. 26. $(b+c)(2a-b)\times(2a+c)(2a+b-c)$. 27. $3(a+b)(b+c)(c+a)$. 28. $(a^2+a\sqrt{6}+3)(a^2-a\sqrt{6}+3)$. 29. $(a^2+ab\sqrt{2}+b^2)(a^2-ab\sqrt{2}+b^2)$. 30. $(a-1)(a+3)^2$. 31. $(a^2+3a+1)^2$ 32. $(a+2)(a+6)(a^2+8a+10)$. 33. $(3a^2+4a-1)(3a^2+2a+1)$. 34. $(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)$. 35. $3(a-b)(b-c)(c-a)$. 36. $3(a+c)(a-c)(a^2+b^2)(b^2+c^2)$. 37. $(a^2-ab-b^2)(a^2+3ab+b^2)$. 38. $(a+b+c)(ab+bc+ac)$. 39. $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$. 40. $(a+1)(a^2+a+1)(a^2-a+1)$ 41. $(a^2+a+1)^2$. 42. $(a+b)^2(a^2-4ab-b^2)$. 43. $(a^2+a\sqrt{2}+1)(a^2-a\sqrt{2}+2)$. 44. $(a^2+a+1)(a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1)$. 48. Con $a=1$. 51. $\frac{5a+4}{a^2+a+1}$. 52. $\frac{a^4+1}{a+1}$. 53. $\frac{a^2-1}{a^2-2a^3+4}$. 54. $\frac{a^2-4}{a^2+5}$. 55. $\frac{2a^2+3}{3a^2-3}$. 56. $\frac{5a^2-3b}{a^2+2}$. 57. $\frac{1}{a^2-b^2}$. 58. $\frac{16a^{15}}{1-a^{16}}$. 59. $\frac{32}{1-a^{32}}$. 60. $\frac{5}{a(a+5)}$. 61. $\frac{a}{a^2-1}$. 62. $2a$. 63. $\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$. 64. 0. 65. 0. 66. $\frac{1}{a+c}$. 67. $\frac{2a^4}{a^8-16b^8}$. 68. 0. 69. $a+b+c$. 70. $(a+b)(b+c)(c+a)$. 75. 9. 97. $S_n=\frac{n}{2n+1}$. 98. $S_n=\frac{n}{3n+1}$. 99. $S_n=\frac{n}{4n+1}$. 100. $S_n=\frac{n}{5n+1}$. 101. $S_n=(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$. 120. 39. 121. $\frac{56\sqrt{10}+12}{3}$. 122. 10. 123. $-\sqrt{xy}$. 124. $\frac{1}{b}$ si $-1\leqslant b\leqslant 1$ y b si $b<-1$; $b>1$. 125. $a+b$ si $a\geqslant 0$ y $b\geqslant 0$ y $\frac{a(a+b)}{b}$ si $a<0$ y $b<0$. 126. $2+\sqrt{3}$. 127. $\sqrt{2}-1$. 128. 3. 129. $\sqrt{2}$. 130. $(\sqrt{3}+1)\sqrt[4]{2}$. 131. $1+\sqrt{2}$. 132 $\sqrt{3}-1$. 133. $\sqrt{5}-2$. 134. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. 135. $\frac{(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}$.

136. $\frac{\sqrt[3]{225}+\sqrt[3]{105}+\sqrt[3]{49}}{8}$ 137. . $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2}$. 138. $\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{4}$.
139. $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$. 140. $\frac{\sqrt{21}-\sqrt{15}-\sqrt{14}+\sqrt{10}}{2}$. 141. $\frac{2-\sqrt[4]{8}}{2}$.
142. $-\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3})(4+2\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3})$. 143. $1+\sqrt{2}$. 144. Cierto. 145. Cierto. 146. Cierto. 147. Cierto. 148. Cierto. 149. Cierto. 150. Cierto. 151. Cierto. 160. $\frac{\sqrt{a}}{4}$. 161. 2. 162. $\sqrt{m}-\sqrt{n}$. 163. -1 si $0<a\leqslant 1$; $-\frac{(\sqrt{1-a^2}+1)^2}{a^2}$ si $-1\leqslant a<0$. 164. $\sqrt[3]{(m-n)^2}$. 165. $a+b$. 166. $4\sqrt{a}$. 167. $\sqrt{\frac{a}{b}}$. 168. $\sqrt[3]{\frac{2a}{1+a}}$. 169. $\frac{1}{1-a^2}$. 170. $4a$. 171. 1. 172. $-\sqrt[6]{b}$. 173. 1. 174. 0. 175. $\frac{a^{\frac{2}{3}}+1}{4}$. 176. $\frac{2\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$. 177. $-\sqrt[6]{b}$. 178. $\frac{a}{2}$.
179. $a-1$ si $a>-1$, $a\neq 0$, $a\neq 1$ y $1-a$ si $a<-1$. 180. $2a$. 181. $\sqrt[6]{\frac{b}{a}}$.
182. a) 0; b) 3; c) -1. 183. a) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$; b) $\frac{1}{\sqrt[4]{125}}$. 184. a) 24; b) 890; 185. 0. 186. a) $\log_3 12$; b) $\frac{1}{3}$. 187. a) 0; b) 0; 188. 3,0970. 189. $\frac{a+3}{2(a+1)}$.
190. $\frac{4(3-a)}{3+a}$. 191. $\frac{b}{1-a}$. 192. $\frac{2-a}{a+b}$. 193. $\frac{1}{b}$. 194. $\frac{a+2b-2}{1-a}$.
195. $\frac{3a-b+5}{a-b+1}$. 196. $\frac{a+1}{2a+b}$. 197. $\frac{r(p+q)}{pq}$. 198. $\frac{5a-3}{b}$. 199. 1.
207. $\log_a b$. 208. $\log_a b$. 209. $a+b$. 210. $b^{\log_b a}$. 211. $-a$ si $0<a<1$; $a-2$ si $a>1$. 212. $\log_a b$ si $a>1$ y $b>1$ ó si $0<a<1$ y $0<b<1$. 213. 0 si $a>1$ y $b>1$ ó si $0<a<1$ y $0<b<1$; $-2(\log_b a+\log_a b)$ si $a>1$ y $0<b<1$ ó si $0<a<1$ y $b>1$. 214. $\log_a b$. 215. 2 si $1<a\leqslant b$; $2\log_a b$ si $1<b<a$. 269. $a>b$. 270. $a<b$. 271. $a>b$. 272. $a<b$. 273. $a>b$. 274. $a>b$. 275. $a<b$. 276. a) $a=b$; b) $a=b$. 277. a) $a>b$; b) $a<b$. 278. a) $a>b$; b) $a>b$. 279. $a>b$. 280. $a<b$. 281. $a<b$. 282. $a<b$. 283. $a<b$. 284. $d<b<a<c$. 295. Sí. 296. No. 297. No. 298. Sí. 299. Sí. 300. No. 301. Sí. 302. Sí. 303. Sí. 304. No. 305. Sí. 306. Sí. 307. No. 308. No. 309. Sí. 310. No. 311. No. 312. No. 313. No. 314. 4. 315. 0. ; -2. 316. 13. 317. 5; -2. 318. 9. 319. 8. 320. 6. 321. 6. 322. 2; 34. 323. 4. 324. 3 325. 4. 326. 8.
327. 5. 328. $5\frac{2}{3}$. 329. 3; 4. 330. 3. 331. 1; -1; i; $-i$. 332. 2; -2; $1+i\sqrt{3}$; $1-i\sqrt{3}$; $-1+i\sqrt{3}$; $-1-i\sqrt{3}$. 333. $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$. 334. i; $-i$; $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$, $\frac{\sqrt{3}-i}{2}$; $\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$; $\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$. 335. 1; $\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$; $\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$. 336. -1; 2; 3. 337. -1; -3; -5; 338. $-\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$; 3. 339. 1; 2; 5, $\frac{5}{2}$. 340. -1; 2; $-3+i\sqrt{3}$; $-3-i\sqrt{3}$. 341. 1; 2; $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. 342. 3;

-3; -4; $i\sqrt{3}$; $-i\sqrt{3}$. 343. -1; $\frac{-1+i\sqrt{15}}{4}$; $\frac{-1-i\sqrt{15}}{4}$. 344. -1; 3; $\frac{1}{3}$. 345. 4, $\frac{20+i\sqrt{59}}{17}$; $\frac{20-i\sqrt{59}}{17}$. 346. 2; -2; $\frac{3\sqrt{21}}{7}$; $-\frac{3\sqrt{21}}{7}$. 347. i; $-i$; $\frac{1+i\sqrt{23}}{4}$; $\frac{1-i\sqrt{23}}{4}$. 348. $\frac{i\sqrt{6}}{2}$; $-\frac{i\sqrt{6}}{2}$; $1+2i$; $1-2i$. 349. 2; -2; $2i$; $-2i$; $\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$; $\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$; $\frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$. 350. 2; 3; $\frac{5+i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{5-i\sqrt{3}}{2}$. 351. 3; -1; $1+\sqrt{10}$; $1-\sqrt{10}$. 352. 2; $\frac{1}{2}$; $\frac{1+2i\sqrt{6}}{5}$; $\frac{1-2i\sqrt{6}}{5}$. 353. 1; 0; -1; -2; 354. 0; 1; $\frac{1+i\sqrt{15}}{2}$; $\frac{1-i\sqrt{15}}{2}$. 355. 1; 2; $\frac{9+i\sqrt{51}}{6}$; $\frac{9-i\sqrt{51}}{6}$. 356. -1; 2; $1+i$; $1-i$; $\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$; $\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$. 357. $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$; $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$; $\frac{3+i\sqrt{11}}{2}$; $\frac{3-i\sqrt{11}}{2}$. 358. -3; 2; $\frac{-1+i\sqrt{15}}{2}$; $\frac{-1-i\sqrt{15}}{2}$. 359. $\frac{-5+\sqrt{13}}{2}$; $\frac{-5-\sqrt{13}}{2}$; $\frac{-5+i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{-5-i\sqrt{3}}{2}$. 360. $-\frac{1}{2}$; $-\frac{5}{4}$; $\frac{-7+2i\sqrt{2}}{8}$; $\frac{-7-2i\sqrt{2}}{8}$. 361. $\frac{11}{2}$; $\frac{9}{2}$; $\frac{10+i\sqrt{7}}{2}$; $\frac{10-i\sqrt{7}}{2}$. 362. -3; -5; $-4+i\sqrt{7}$; $-4-i\sqrt{7}$. 363. $-\frac{1}{2}$; $\frac{2+i}{5}$; $\frac{2-i}{5}$. 364. 1; $-\frac{1}{2}$. 365. $-\frac{1}{2}$; $\frac{3+2\sqrt{7}}{19}$; $\frac{3-2\sqrt{7}}{19}$. 366. $-\frac{1}{2}$; $\frac{-1+i}{2}$; $\frac{-1-i}{2}$. 367. $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; $-\frac{1}{4}$. 368. 0,3; 0,4; 0,5. 369. 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$. 370. -3; $\frac{3+i\sqrt{83}}{4}$; $\frac{3-i\sqrt{83}}{4}$. 371. $\frac{5}{3}$; $\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$; $\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$. 372. $\frac{7}{4}$; $\frac{-2+3i\sqrt{2}}{4}$; $\frac{-2-3i\sqrt{2}}{4}$. 373. $\frac{1}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{7}}{2}$; $\frac{-1-\sqrt{7}}{2}$. 374. 2; $\frac{1}{2}$; $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. 375. 2; $\frac{1}{2}$; $\frac{-11+\sqrt{105}}{4}$; $\frac{-11-\sqrt{105}}{4}$. 376. 1; $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$. 377. 2; 6; $\frac{-3+i\sqrt{39}}{2}$; $\frac{-3-i\sqrt{39}}{2}$. 378. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$; $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. 379. $1+2i$; $1-2i$; $\frac{-3+i\sqrt{11}}{2}$, $\frac{-3-i\sqrt{11}}{2}$. 380. 2; -1; $\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$; $\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$. 381. -1; $-\frac{1}{4}$; $\frac{3+i\sqrt{17}}{8}$; $\frac{3-i\sqrt{17}}{8}$. 382. $2+i\sqrt{3}$; $2-i\sqrt{3}$; $-2+$ $+i\sqrt{5}$; $-2-i\sqrt{5}$. 383. -1; 9; $\frac{5+\sqrt{106}}{2}$; $\frac{5-\sqrt{106}}{2}$. 384. 0; -1. 385. $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 386. 4; -4; 387. 3; $\frac{17}{19}$.

388. $\left]-\infty; \frac{7}{4}\right]$. 389. $\left]-\infty; \frac{5}{3}\right]$. 390. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{3+i\sqrt{11}}{2}$; $\frac{3-i\sqrt{11}}{2}$. 391. $1+\sqrt{2}$; $1-\sqrt{2}$; $1+\sqrt{6}$; $1-\sqrt{6}$. 392. 1; $\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$. 393. $-\sqrt{2}$; $1-\sqrt{5}$. 394. $\frac{-5+\sqrt{113}}{4}$. 395. $\varnothing$. 396. -2; 0. 397. -3; -2; 0; 1. 398. $[-1; 0]$. 399. $-\frac{1}{2}$; $-\frac{5}{2}$. 400. $[2; \infty[$. 401. $\frac{3}{2}$; $\frac{9}{2}$. 402. $[1; 2]$. 403. 1; $\frac{11}{2}$. 404. $\frac{3}{2}$. 405. 2; $\frac{2}{5}$. 406. -2. 407. $]-\infty; -2]\cup[2; \infty[$. 408. -2. 409. $\frac{7}{6}$. 410. -3; 2; $\frac{-1+\sqrt{65}}{2}$. 411. -1. 412. $]-\infty; -3]\cup[3; \infty[$. 413. $[-3; -2]\cup[2; 3]$. 414. 2. 415. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. 416. $\frac{1}{2}$. 417. $-\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$; 2. 418. $(-4; -4)$, $(-6; -2)$. 419. $(-4; -5)$, $(5; 4)$. 420. $(2; -5)$, $(-4; 3)$, $\left(1+2\sqrt{3}; \frac{3+8\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(1-2\sqrt{3}; \frac{3-8\sqrt{3}}{3}\right)$. 421. $(1; 1)$, $\left(\frac{-5+\sqrt{140}}{5}; \frac{-7+\sqrt{140}}{7}\right)$, $\left(\frac{-5-\sqrt{140}}{5}; \frac{-7-\sqrt{140}}{7}\right)$. 422. $(4; 1)$, $\left(-2+2i\sqrt{3}; -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-2-2i\sqrt{3}; -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 423. $(2; 0)$, $(0; -2)$. 424. $(1; 1; 1)$, $(7; -3; -1)$. 425. $(3; 1; 2)$, $\left(\frac{17}{9}; \frac{53}{18}; \frac{61}{18}\right)$. 426. $\left(\frac{2}{3}; 3\right)$, $\left(-\frac{2}{3}; -3\right)$, $(1; 2)$, $(-1; -2)$. 427. $(1; 2)$, $\left(-\frac{239}{146}; \frac{117}{146}\right)$. 428. $(1; 1)$, $(3; 2)$, $(-1; -2)$, $(-11; -7)$. 429. $(1; 1; 1)$, $(-2; -2; -2)$. 430. $(0; 0)$, $(4; 2)$, $(-2; -4)$. 431. $(1; 0)$. 432. $(3; 1)$, $(3; -1)$, $\left(-\frac{5}{3}; \frac{\sqrt{65}}{3}\right)$, $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{\sqrt{65}}{3}\right)$. 433. $(3\sqrt{2}; \sqrt{2})$; $(-3\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $(3\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $(-3\sqrt{2}; \sqrt{2})$. 434. $(3; 2)$, $(1; 4)$, $(-3; -4)$, $(-5; -2)$. 435. $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{6}\right)$, $\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{5}{24}; -\frac{7}{24}\right)$, $\left(-\frac{3}{8}; -\frac{1}{8}\right)$. 436. $\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(0; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $(1; 1)$, $(-1; -1)$. 437. $(3; 1)$, $(-3; -1)$, $\left(\frac{14\sqrt{106}}{53}; \frac{4\sqrt{106}}{53}\right)$, $\left(\frac{-14\sqrt{106}}{53}; \frac{-4\sqrt{106}}{53}\right)$. 438. $\left(t; -\frac{3}{2}t\right)$, $t\in R$. 439. $(t; 7t)$, $t\in R$. 440. $\left(\frac{\sqrt{30}}{48}; -\frac{\sqrt{30}}{10}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{30}}{48}; \frac{\sqrt{30}}{10}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{30}}{5}, \frac{\sqrt{30}}{5}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{30}}{5}; -\frac{\sqrt{30}}{5}\right)$. 441. $(1; 3)$, $(-1; -3)$, $\left(\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{7}}; -\frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)$, $\left(-\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{7}}; \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)$. 442. $\left(2; \frac{1}{2}\right)$, $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{10}}{5}; -\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{10}}{5}; \frac{2\sqrt{18}}{5}\right)$. 443. $(1; 2)$, $(-1; -2)$, $(2; 1)$, $(-2; -1)$.

444. (2; 3), (−2; −3), (3; 2), (−3; −2). 445. (2; 3), (3; 2), $\left(-1+i\sqrt{3};\ -\frac{3}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-1-i\sqrt{3};\ -\frac{3}{2}-\frac{3i\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2};\ -1+i\sqrt{3}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}-\frac{3i\sqrt{3}}{2};\ -1-i\sqrt{3}\right)$. 446. (0; 0), $(\sqrt{7};\ \sqrt{7})$, $(-\sqrt{7};\ -\sqrt{7})$, $(\sqrt{19};\ -\sqrt{19})$, $(-\sqrt{19};\ \sqrt{19})$, (2; 3), (−2; −3), (3; 2), (−3; −2). 447. $\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2};\ \sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2};\ 2-i\sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2};\ -2+i\sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2};\ -2-i\sqrt{2}\right)$, (2; 1) (−2; −1), (2$i$; i), (−2i; −i). 448. (3; 1), (1; 3), (−1; −3), (−3; −1). 449. (3; 2) (−2; −3), (0; 0). 450. (0; 0), (3; 2), (−4; −12). 451. (3; 5), (5, 3), $(-5+2i\sqrt{2};\ -5-2i\sqrt{2})$, $(-5-2i\sqrt{2};\ -5+2i\sqrt{2})$. 452. (2; 3), (3, 2), $(-2+\sqrt{7};\ -2-\sqrt{7})$, $(-2-\sqrt{7};\ -2+\sqrt{7})$. 453. (−2; 3), (3; −2) 454. (6; 6), $\left(\frac{-3+3\sqrt{5}}{2};\ \frac{-3-3\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{-3-3\sqrt{5}}{2};\ \frac{-3+3\sqrt{5}}{2}\right)$. 455. (1; 4), (4; 1), $\left(\frac{-5+\sqrt{41}}{2};\ \frac{-5-\sqrt{41}}{2}\right)$, $\left(\frac{-5-\sqrt{41}}{2};\ \frac{-5+\sqrt{41}}{2}\right)$. 456. (2; 3), (3; 2), $\left(-\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{103}{48}};\ -\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{103}{48}}\right)$, $\left(-\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{103}{48}};\ -\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{103}{48}}\right)$. 457. (2; 3), (3; 2). 458. (1; 5), (5; 1), (−1; −5), (−5; −1). 459. (2; 1), (1; 2). 460. (2; 1), (1; 2), (−2; −1), (−1; −2); (0, 0). 461. (2; −1), (−2; 1), (1; −2), (−1; 2). 462. (3; 1), (−1; −3), $(\sqrt[3]{13};\ -\sqrt[3]{13})$. 463. (1; 2; −1), (−1; −2; 1). 464. (1; 2; −1), (−1; −2, 1), $\left(\frac{3\sqrt{7}}{7};\ \frac{5\sqrt{7}}{7};\ -\frac{\sqrt{7}}{7}\right)$, $\left(-\frac{3\sqrt{7}}{7};\ -\frac{5\sqrt{7}}{7};\ \frac{\sqrt{7}}{7}\right)$. 465. (2; 1, 0), (−2; −1; 0). 466. (0; 0; 0), (1; 1; 1), $(0;\ \sqrt{2};\ \sqrt{2})$, $(0;\ -\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2};\ 0;\ \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2};\ 0,\ -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ 0)$, $(-\sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ 0)$. 467. (1; 2; 3), (1; 4;1), (5; 2; −1), (5; 4; −3). 468. (1; −2; 3), (3; −2; 1), (1; −3; 2), (2; −3; 1), (5; −1; 1), (1; −1; 5). 469. (0; 0; 0), $(\sqrt{2};\ \sqrt{2},\ \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$. 470. (3; 2; 5), (3; −2; −5), (−3; −2; 5), (−3, 2, −5). 471. (9; 3; 1), (1; 3; 9). 472. (3; −2; 2), $\left(\frac{9+3\sqrt{5}}{2};\ \frac{-7-3\sqrt{5}}{2};\ \frac{1-3\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{9-3\sqrt{5}}{2};\ \frac{-7+3\sqrt{5}}{2};\ \frac{1+3\sqrt{5}}{2}\right)$. 473. (1; 2; 3). 474. (1; 1; 1). 475. (1; 1; 1). 476. $\left(1;\ 2;\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(2;\ \frac{1}{2};\ 1\right)$, $\left(\frac{1}{2};\ 1;\ 2\right)$, $\left(1,\ \frac{1}{2};\ 2\right)$, $\left(2;\ 1;\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2};\ 2;\ 1\right)$. 477. $\left(\frac{7-\sqrt{113}}{2};\ \frac{7+\sqrt{113}}{2};\ 9\right)$, $\left(\frac{7+\sqrt{113}}{2};\ \frac{7-\sqrt{113}}{2};\ 9\right)$, $\left(\frac{-7+\sqrt{113}}{2};\ \frac{-7-\sqrt{113}}{2};\ -9\right)$, $\left(\frac{-7-\sqrt{113}}{2};\ \frac{-7+\sqrt{113}}{2};\ -9\right)$, (3; 4; 5) (4; 3; 5), (−3; −4; −5), (−4; −3; −5) 478. (0; 0; 0), (1; 2; 1), (2; 1; 1), $\Big(\frac{3+\sqrt{6}}{3};\ \frac{3-\sqrt{6}}{3};$

$\frac{2}{3}\Big)$, $\Big(\frac{3-\sqrt{6}}{3}; \frac{3+\sqrt{6}}{3}; \frac{2}{3}\Big)$. 479. (13; 0; 13), (8; 2; 4). 480. 31. 481. 24. 482. 12 y 1232. 483. 103. 484. 285 714. 485. 54. 486. 83. 487. 428 y 824. 488. En 8 h. 489. 820. 490. 6; $-\frac{1}{2}$. 491. 12; 24; 36; 54 ó 52,5; 37,5; 22,5; 13,5. 492. 5103 ó $\frac{7}{81}$. 493. 931. 494. 1350. 495. 12, 18, 27. 496. 20. 497. 5. 498. 0,25 kg. 499. 12 r ó 9,5 r. 500. 2. 501. 24 y 16. 502. 35 kg de harina de trigo y 45 kg de cebada. 503. El 20%. 504. El 3%. 505. 200 r. 506. El 38,8%. 507. El 10%. 508. 1. 509. 44 personas. 510. 32 personas. 511. 20 km. 512. 50 km/h. 513. 10 km/h. 514. 360 cm y 18 cm/s ó 60 cm y 6 cm/s. 515. 1375 km. 516. 840. km/h, 80 km/h y 70 km/h. 517. 40 m/min. 518. 6 km/h y 3 km/h. 519. 6 m/s y 8 m/s. 520. 20 km/h. 521. 20 km/h. 522. 3 km/h y 1 km/h. 523. 8 km. 524. 10 h y 9 h. 525. 60 km/h y 40 km/h. 526. 15 h y 10 h. 527. $a(1+\sqrt{2})$ h. 528. 50 km/h y 100 km/h. 529. 60 km/h y 100 km/h. 530. 40 m/s y 36 m/s. 531. 15 m/s, 10 m/s. 532. 20 m/min, 15 m/min, 280 m. 533. $\frac{1}{80}$, $\frac{1}{90}$. 534. 25 h. 535. 16 h. 536. 2 h. 537. 25 km/h. 538. La velocidad de los barcos es igual a 15 km/h, la velocidad de la corriente es igual a 3 km/h. 539. 14 km/h. 540. 1 s. 541. 10 km/h. 542. 20 km/h. 543. La velocidad del primer peatón es 2 veces mayor que la del segundo. 544. En 8 horas 30 min. 545. 10 veces más. 546. En 3 h. 547. 1 : 2. 548. $30 < v < 40$. 549. 8 km/h y 7 km/h. 550. Con el ciclista. 551. 2,75. 552. 48 km/h. 553. En 6 h y en 4 h. 554. En 4 h. 555. En 3 h. 556. 24 h. 557. En 90 s. 558. $\frac{20}{3}$ h y $\frac{10}{3}$ h. 559. 4 h y $\frac{4}{3}$ h. 560. 80 km/h. 561. El 60%. 562. Primera brigada — 13 piezas, segunda brigada — 11 piezas. 563. 60 m^3/h y 24 m^3/h. 564. 16 h. 565. Por el segundo tubo 2 veces más. 566. El nivel del petróleo subió. 567. En 20 h y en 30 h. 568. En 3 h y en 4 h. 569. En 12 y en 8 h. 570. En $\frac{5}{6}$ h y en $\frac{5}{18}$ h. 571. En 16 días. 572. En $\frac{20}{3}$ h y en $\frac{16}{3}$ h. 573. 7,5 h y 10,5 h. 574. En 14,4 h. 575. En 3 h. 576. El rendimiento de la segunda fábrica es 2 veces mayor. 577. En 6 días. 578. En $\frac{60}{7}$ min. 579. 8 h. 580. 50 h. 581. 3 veces. 582. $\frac{6}{5}$ veces. 583. En 10 días. 584. A es 28 r. más caro. 585. 300 g y 500 g. 586. 441 g. 587. 40 t y 60 t. 588. 187,5 kg. 589. 15 t. 590. El 53%. 591. El 5%. 592. 10 kg. 593. ≈ 2,77 kg. 594. 1 : 3. 595. 1,64 y 1,86 l. 596. 15 kg. 597. 10 kg, el 69%. 598. 2 veces. 599. 18 kg. 600. $a+b-c$. 601. 6 l. 602. 18 l. 603. 2,4 kg y 4,8 kg. 604. 3,5 l de glicerina y 0,5 l de agua. 605. 10 l. 606. El 5% y el 10%. 607. El 15% y el 40%. 608. El 62,5% y el 55%. 609. $\varnothing$. 610. 7; 8. 611. 2. 612. 0. 613. 0; 2. 614. $\varnothing$. 615. $2\sqrt{2}$; $-2\sqrt{2}$. 616. 0; 0,5. 617. 1,25. 618. 1; -1. 619. 64. 620. 1; $-\frac{1}{3}$. 621. 1; $-\frac{8}{3}$. 622. 1; 2. 623. 4; -4. 624. 2. 625. 1024. 626. 1. 627. $-0,5$. 628. 1. 629. 6; -2. 630. 2; -7. 631. 4; -4. 632. $\frac{-1+\sqrt{74602}}{18}$; $\frac{-1-\sqrt{74602}}{18}$. 633. 1. 634. -1, 8, 27. 635. 1; $-\frac{1}{8}$. 636. 1. 637. -1; 0. 638. -2, 1. 639. 5. 640. -37, 6. 641. 2. 642. 15. 643. -2; 5. 644. 1. 645. 2. 646. 1. 647. -88; -24; 3. 648. -1; $-\frac{1}{2}$; 1; 2. 649. 2. 650. 1. 651. 1; 2; 10. 652. 1; 20. 653. -3, 3. 654. -2.

655. 8; $8+\frac{12\sqrt{21}}{7}$; $8-\frac{12\sqrt{21}}{7}$. 656. 0. 657. 1416. 658. 9. 659. 12. 660. 1. 661. 2, 3. 662. 1; 4. 663. 2; 6. 664. −61; 4. 665. 16; 81. 666. 2; 6. 667. 1; 32 668. $17+\sqrt{257}$; $17-\sqrt{257}$. 669. $\frac{6\sqrt{119}}{119}$. 670. 0. 671. 0,25. 672. 3; $\frac{5+\sqrt{297}}{8}$. 673. 2; 3. 674. 1; −6. 675. 1. 676. 3. 677. 5. 678. $\frac{841}{144}$ 679. (1; 4). 680. (9; 4). 681. (3; 2), $\left(\frac{17}{27};\ -\frac{14}{9}\right)$. 682. $\left(\frac{10}{3};\ -\frac{7}{3}\right)$. 683. (7; 13), (−7; −13); $\left(\frac{13}{2};\ 14\right)$, $\left(-\frac{13}{2};\ -14\right)$. 684. (3; 1). 685. (12; 4), (34; −38), $(103-19\sqrt{77};\ -77+25\sqrt{17})$. 686. (2; 8), (8; 2). 687. (1; 9), (9; 1). 688. (4; 1), (1; 4). 689. (8; 1), (1; 8). 690. (8; 1), (1; 8). 691. (8; 1), (−8; 1), (−8; −1), (8; −1). 692. (1; 7), (7; −8), $\left(\frac{49}{64};\ \frac{41}{8}\right)$. 693. (0; 0). 694. (5; 4). 695. (2; 3), $\left(\frac{13}{3};\ -\frac{5}{3}\right)$. 696. $\left(\frac{17}{12};\ \frac{5}{3}\right)$. 697. (4, 9, 1), (−4; −9; −1). 698. (3; −2; 6). 699. (5; 1; 5). 700. $\left(\frac{9}{58};\ -\frac{6}{29};\ \frac{33}{29}\right)$. 701. 3. 702. −3; 1. 703. $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$; $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$. 704. 3; $-\frac{5}{2}$ 705. 3; $-\frac{1}{5}$. 706. 3. 707. 2. 708. 0. 709. 0. 710. −1; 1; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$ 711. 3. 712. 1. 713. 3. 714. 2,5. 715. 0. 716. 1,5. 717. −1; 1. 718. 0. 719. $\log_{0,4}5$; −1. 720. 0. 721. −1; 1. 722. 1. 723. 0. 724. 0. 725. 1; $1+\sqrt{2}$; $1-\sqrt{2}$. 726. 1; $-2(1+\log_3 2)$. 727. 2; $-1-\log_6 2$. 728. −1; 1; 2. 729. −1; 1; 2. 730. −3; 1; 2; 3; 4. 731. $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{3}$; 2. 732. 2. 733. 2. 734. $\sqrt{10}$; 9. 735. −1; 1; 4. 736. 2; 3. 737. 0; 1,5 738. $2-\sqrt{3}$; $2+\sqrt{3}$. 739. 0,5 740. 1,5; 3. 741. 8. 742. 6. 743. 1; 2. 744. 1,5; 10. 745. 37. 746. $\frac{5}{28}$. 747. 3; −5. 748. 2; 3. 749. ∅. 750. 5. 751. 4; 6. 752. 41. 753. 0,75. 754. 3. 755. 2. 756. ∅. 757. 1. 758. 4. 759. 2. 760. 2. 761. 2; 8. 762. $\frac{3-2\sqrt{2}}{8}$, $\frac{3+2\sqrt{2}}{8}$. 763. −4. 764. 10^{-3}; 10^{-1}; 10, 10^{3}. 765. $-1+\sqrt{10}$; 9. 766. 10. 767. 10^{-1}, 10^{3}. 768. 10^{-1}; $10^{\frac{1}{4}}$. 769. $\sqrt[5]{5}$; 5. 770. 10. 771. $\sqrt{2}$; 4. 772. 2^{-2}; 2. 773. −8; 1,9. 774. −5; 5. 775. $\frac{5}{12}$. 776. $\frac{3}{3\sqrt[3]{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 777 1. 778. 2. 779. 10; 10^{5}. 780. 0,5; 32. 781. 10^{-1}; 10^{3}. 782. 10^{-2}; 10^{2}. 783. ∅ 784. 10^{-4}; 10. 785. 5^{-1}; 5^{2}. 786. 3^{-1}; 3^{2}. 787. $\sqrt{626}$. 788. 2. 789. $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{15}$. 790. 2^{-4}; 2. 791. 2^{-1}; 1; 16. 792. 100. 793. 1; $10^{-\sqrt{\log 1,5}}$; $10^{\sqrt{\log 1,5}}$. 794. 9^{-1}; 9. 795. $\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$; 1; 2. 796. $2^{-\frac{1}{9}}$. 797. 3. 798. 0. 799. 17. 800. 10^{-1}; 2, 10^{3}. 801. −2. 802. 7; 14. 803. 1. 804. −1; $\frac{1-\sqrt{46}}{5}$; $\frac{1+\sqrt{46}}{5}$ 805. 1; 2. 806. (−10; −12), (12; 10). 807. (2; 3), (3; 2).

808. $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{6}\right)$. 809. $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{5}\right)$. 810. $(3; 2)$. 811. $(4; 1)$. 812. $(3; 2)$. 813. $(1; 1), (4; 2)$. 814. $(1; 1), (2; 4), (-2, 4)$. 815. $(1, 2), (2; 1)$. 816. $\left(\frac{1}{4}; 64\right), (8; 2)$. 817. $(9; 7)$. 818. $(2; 32), (32; 2)$. 819. $\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)$, $(3; 1)$. 820. $(7; 3)$. 821. $(17; 9)$. 822. $(2; 6)$. 823. $(125, 4) (625; 3)$. 824. $(3; 27), (27; 3)$. 825. $\left(-\frac{7\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 826. $(4; 1)$ 827. $(1; 1)$; $(3\sqrt{3}; \sqrt{3})$. 828. $(9; \sqrt[3]{9})$; $(\sqrt[3]{9}; 9)$. 829. $\left(\frac{1}{8}; 64\right), \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$. 830 $(5,5; 2,5)$. 831. $(2; 3), (t; 1)$, donde $1 < t < 3$. 832. $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}; \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$. 833. $(\log_4 12; \log_4 3)$. 834. $(1; -1)$. 835. $]0; 1[\cup]1; \infty[$. 836. $]-\infty; -\frac{1}{3}[\cup]\frac{3}{2}; 2[$. 837. $]-\infty; -2[\cup]-2; -1[\cup]\frac{2}{3}; 3[$. 838. $]-5; 5[$. 839. $]-\infty; -8[\cup]0; 8[$. 840. $[2; 5]$. 841. $\left]\frac{7-\sqrt{61}}{2}, \frac{7+\sqrt{61}}{2}\right[$. 842. 4. 843. $x \in R$. 844. $]-\infty; -6[\cup[-2; \infty[$. 845. $]-\infty; 1]$. 846. -1; 1. 847. $]-\infty; \frac{2}{3}[\cup]1; \frac{5}{2}\Big[$. 848. $]-4; -3[\cup]-2; -1[\cup]\frac{1}{2}; 3[$. 849. $]-\infty; -4] \cup \left[\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right] \cup [4; \infty[$. 850. $]-2; 2[\cup]2; 4[$. 851. $\left[-3; \frac{1-\sqrt{41}}{4}\right] \cup \left[0; \frac{1+\sqrt{41}}{4}\right] \cup \{3\}$. 852. $]-\infty; 2[\cup]3; 5[\cup]7; \infty[$. 853. $]-\infty; -3[\cup]2-\sqrt{6}, 3[\cup]2+ +\sqrt{6}; \infty[$. 854. $\left]-\frac{5}{3}; 0\right] \cup \left]\frac{5}{3}; \infty\right[$. 855. $]-1; 5[$. 856 $]-8; 1]$. 857. $\left]-2; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup\left]\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; 2\right[$. 858. $]-\infty; \frac{3}{2}[\cup]\frac{7}{3}; \infty[$. 859. $]-\infty; -2[\cup[1; \infty[$. 860. $]-\infty; 0[\cup]3; \infty[$. 861. $]-\infty; -1]$ 862. $]-3; -2[\cup]-1; 1[$. 863. $]-\infty; 2[\cup]2; \infty[$. 864. $]\frac{1-\sqrt{73}}{6}; -1[\cup]1; \frac{\sqrt{1}+73}{6}\Big[$. 865. $]-\infty; 1[\cup\left]\frac{4}{3}; 2\right[$. 866. $]-\infty; -\frac{4}{3}[\cup]-\frac{79}{75}; \frac{3}{2} \times \times\Big[\cup]2; \infty[$. 867. $]-\infty; -7[\cup]-1; 0[\cup]0; 1[\cup]3; \infty[$. 868. $]-\infty; -1[\cup]-1; 2]$. 869. $]-\infty; 2[\cup[3,5; 4[\cup[7; \infty[$. 870. $]-\infty; 5]$ 871. $]0, 9[$. 872. $]2,7; 6[$. 873. $]1; 2[$. 874. $[1; 2[$. 875. $]-3; -\sqrt{7}[\cup]\sqrt{7}; 3[$. 876. $]-\infty; \frac{2}{3}[\cup]\frac{7}{4}; 2\Big[$. 877. $]-1; 1[\cup]3; 5[$. 878. $]-5; -\frac{3}{2}[\cup]\frac{1}{2}; 1\Big[$. 879. $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. 880. $]0; 1[$. 881. $]-4; -3[\cup[-2, -1]\cup[1; 2[$. 882. $]-8; -6,5[\cup]0; 5[$. 883. $]-4; -3[\cup]-2; -1[\cup]0; \frac{1}{3}[\cup]1; 2[\cup]2; 3[\cup]3; 4[$. 884. $]-\infty; -7[\cup]-7; -2[\cup]1; 7[\cup]7;$

8] ∪]11, ∞[. 885. $\left[-1; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. 886.]−∞; 1[∪]1; 2[∪]2; ∞[. 887. $\left[\frac{37}{7}; 6\right[\cup \left]6; 7\right]$. 888. $\left[\frac{5}{3}; 2\right] \cup \left]3; \infty\right[$. 889. ∅. 890.]−∞; 1[∪]2; 3[. 891. $\left]-\infty; \frac{2}{3}\right[\cup \left]3; \infty\right[$. 892.]−1; 1[. 893. [0; 8]. 894.]−∞; 2[∪]3; 7[. 895. a)]1; 6[; b) $\left]\frac{5}{9}; 1\right] \cup \left]6; \infty\right[$; c) ∅. 896.]−∞; −1[∪]2; 3[. 897.]−6; 2[. 898.]−2; 4[. 899.]−∞; −16[∪]6; ∞[. 900.]1; 4[. 901. $\left]-\infty; -\frac{4}{3}\right] \cup \left[2; \infty\right[$. 902. [1,5; 2,5]. 903.]−∞; −4[∪]0; ∞[. 904.]−∞; −0,4] ∪ [4; ∞[. 905.]−∞; −5[∪]−1; 1[∪]1; ∞[. 906. $\left]-\infty; -2\right[\cup \left]\frac{4}{3}; \infty\right[$. 907. [4,5; ∞[. 908.]−∞; 1] ∪ [1,5; ∞[. 909. $x \in R$. 910.]0; 0,4[. 911. $\left[0; \frac{1}{3}\right]$. 912. $\left]-\infty; \frac{3-\sqrt{65}}{4}\right[\cup \left]\frac{3-\sqrt{33}}{4}, \frac{3+\sqrt{33}}{4}\right[\cup \left]\frac{3+\sqrt{65}}{4}; \infty\right[$. 913.]−∞; 1[∪]2,2; ∞[. 914. $\left[\frac{-1-\sqrt{11}}{2}; -1\right[\cup \left]-1; 1\right[\cup \left]1; \frac{-1+\sqrt{11}}{2}\right]$. 915.]−∞; −2[∪]−2; −1[∪]−1; 0[. 916.]−∞; −2] ∪ [−1; ∞[. 917.]−∞; −2[∪]−2, 0] ∪ [1,6; 2[∪]2; 2,5]. 918. [−1; 1]. 919.]−∞; −3[∪]3; ∞[. 920. $\left]-\infty; -\frac{5}{3}\right[\cup \left]3; \infty\right[$. 921.]−∞; −4] ∪ [1; ∞[. 922.]−∞; −5[∪]−1, ∞[. 923. $x \in R$. 924. [1,5; 2[. 925.]1; 3[. 926.]−5; −2[∪]2, 3[∪]3; 5[. 927.]−∞; 3[. 928.]−2; 3[. 929.]−∞; −2[∪]3; ∞[. 930. $\left[\frac{2}{7}, \frac{2}{3}\right]$. 931. $\left]-\frac{1}{2}; \frac{11}{4}\right[$. 932.]−∞; 0[∪]6; ∞[. 933.]−∞; −4[∪]−2, 1[∪]3; ∞[. 934.]−∞; 2] ∪ [4; ∞[. 935.]−∞; 2[. 936.]0; ∞[. 937 $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$. 938. $\left]-\infty; \frac{7}{4}\right[\cup \left]\frac{5}{2}; \infty\right[$. 939. En el primer cajón, 29 piezas y en el segundo, 7 piezas. 940. En la primera brigada, 41 personas y en la segunda, 17 personas. 941. 119 pioneros. 942. 25 300 m. 943. 850 l. 944. Por 9 personas. 945. 8 libros. 946. «Doses» — 11, «treses» — 7, «cuatros» — 10, «cincos» — 2. 947. 180 r. 948. 14 r. 949. [−0,5; 12[. 950.]1; ∞[. 951. [2,6; 4[. 952.]−∞; 0,5] ∪ [0,68; ∞[. 953.]3; ∞[. 954.]−∞; −1[. 955.]0,5; ∞[. 956. $\left]-\infty; -2\right] \cup \left]5; 5\frac{9}{13}\right[$. 957. [4; ∞[. 958.]−3; 1[. 959. $\left[-\frac{20}{9}; 4\right[\cup \left]5; \infty\right[$. 960.]−∞; 0] ∪]4,5; ∞[. 961.]−∞; 0]. 962. $\left[-\frac{10}{13}; 2\right] \cup \left[3; \infty\right[$. 963.]−∞; ∞[. 964.]3; ∞[. 965. $\left[4; 4\frac{9}{16}\right]$. 966. ∅. 967.]4; 5[. 968. $\left[3; \frac{15+16\sqrt{15}}{15}\right]$. 969. ∅. 970. ∅. 971. $\left[2,5, \frac{-5+\sqrt{149}}{2}\right]$. 972. ∅. 973. $[\sqrt{21}; 2\sqrt{7}]$. 974.]−5; 5[. 975. $\left]2; \frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$. 976.]9; ∞[. 977.]−∞; −2[∪ [20,5; ∞[. 978.]−∞; −4[∪]1; ∞[. 979. [−1; 4]. 980.]−1; 3] ∪ [3,5; 7,5[. 981.]2; ∞[. 982.]−∞; ∞[. 983.]−∞; ∞[. 984.]0; ∞[. 985. [2; 6]. 986.]−∞;

$\sqrt[3]{2}\,[\cup]\sqrt[3]{2};\ \infty[$. 987. $]-\infty;\ -2[\cup]0;\ 1[\cup]1;\ \infty[$. 988. $]-2;\ -1]\cup$ $\cup\left[-\frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right]$. 989. $]-\infty;\ -4+2\sqrt{5}[$. 990. $\left]-\infty;\ -\frac{13}{6}\right]\cup[3;\ \infty[$. 991. $]2;\ 8[$. 992. $[-2;\ 0[\cup]0;2]$. 993. $]5;\ \infty[$. 994. $]-1;\ \infty[$. 995. $]-\infty;$ $-2]\cup\left[-1;\ \frac{\sqrt{13}-1}{6}\right[$. 996. $[0;\ 3]$. 997. $[2;\ 5[$. 998. $[-1,\ 0[$. 999. $]0;\ \infty[$. 1000. $]-\infty;\ 0{,}4[$. 1001. $]-\infty;\ 1{,}5[$. 1002. $]-\infty;\ -1[\cup]7;$ $\infty[$. 1003. $]-\infty;\ -6]\cup[2;\ \infty[$. 1004. $]-\infty;\ 1-\log_2 3[$. 1005. $]-2\sqrt{2};$ $2\sqrt{2}[$. 1006. 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. 1007. $[-3;\ -\sqrt{6}[\cup]-\sqrt{6}-2]\cup$ $\cup[2;\ \sqrt{6}[\cup]\sqrt{6};3]$. 1008. $]-1;\ 0[\cup]0;\ 1[\cup]1;\ 2[$. 1009. $]-2;$ $-\frac{5}{3}[\cup]0;\ \frac{1}{3}\left[\right.$. 1010. $]-\infty;\ 66]$. 1011. $\left]\frac{2}{3};\ \log_8 60\right[$. 1012. $]2;\ \infty[$. 1013. $]3;\ \infty[$. 1014. $]0;\ \infty[$. 1015. $]-1;\ 1[$. 1016. $]0,\ 1[$. 1017. $]2,\ \infty[$. 1018. $\varnothing$. 1019. $]0;\ \infty[$. 1020. $]-\infty;\ \log_{1,5} 0{,}5[$. 1021. $]0;\ \infty[$. 1022. $]-\infty;$ $\log_2(1+\sqrt{3})]$. 1023. $\left]-\frac{1}{3};\ \infty\right[$. 1024. $]2;\ \infty[$. 1025. $]0;\ 2[$. 1026. $]-\infty;$ $0[\cup]2;\ 3[\cup]3;\ 3{,}5[\cup]4;\ \infty[$. 1027. $]-\infty;\ -0{,}5[\cup]1;\ \infty[$. 1028. $[\log_3 7;\ 2]$. 1029. $[\log_{13} 5;\ 1]$. 1030. $]0;\ 0{,}5[$. 1031. $]1;\ 1{,}5[$. 1032. $]1;\ 2[\cup]4;\ 5[$. 1033. $]-1;\ 0[\cup]1;\ 2[$. 1034. $]-1;\ 1[\cup]3;\ 5[$. 1035. $]4;\ 5[\cup]95,\ \infty[$. 1036. $\left]\frac{-1+2\sqrt{91}}{5};\ 4\right[$. 1037. $[3;\ 4{,}5[$. 1038. $\left]-1;\ \frac{91}{9}\right[$. 1039. $]3;$ $4[\cup]4;\ \infty[$. 1040. $]0;\ \infty[$. 1041. $]1;\ 1{,}04[\cup]26;\ \infty[$. 1042. $[3;\ 7[$. 1043. $\left]-2;\ \frac{13}{6}\right[$. 1044. $[1;\ 4]$. 1045. $]-\infty;\ -2[\cup]6;\ \infty[$. 1046. $]0;$ $\frac{3-\sqrt{5}}{2}\left[\cup\right]\frac{3+\sqrt{5}}{2};\ 3\left[\right.$. 1047. $\varnothing$. 1048. $]1;\ 3[$. 1049. $]1;3[$. 1050. $]0,$ $1[\cup\left[\frac{\sqrt{113}-7}{2};\ 2\right[$. 1051. $]-2\sqrt{3};\ -2[\cup]2;\ 2\sqrt{3}[$. 1052. $]1;\ \infty[$. 1053. $]0;\ 0{,}75[\cup]1{,}25;\ 2[$. 1054. $[2;\ 3[\cup]3;\ 4]$. 1055. $]1;\ 4[$. 1056. $]2,\ \infty[$. 1057. $]0;\ 1[\cup]\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ 2\left[\right.$. 1058. $]-\infty;\ 0[\cup]5;\ \infty[$. 1059. $]-\infty;$ $-7[\cup]-5;\ -2]\cup[4;\ \infty[$. 1060. $[0{,}5;\ 4]$. 1061. $]0;\ 0{,}5[\cup]2\sqrt{3};\ \infty[$. 1062. $]-\infty;\ -5[\cup]3;\ \infty[$. 1063. $\left[\frac{1}{8};\ \frac{1}{4}\left[\cup\right]4;8\right[$. 1064. $]4^{\log_{0,3} 0{,}2};$ $\infty[$. 1065. $]\sqrt[5]{5};\ 5[$. 1066. $]\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{2}+1);\ \log_5 3[$. 1067. $]0;\ 0{,}4[\cup]1;$ $\infty[$. 1068. $]0;\ 0{,}25[\cup]4;\ \infty[$. 1069. $]1;\ 2[\cup]64;\ \infty[$. 1070. $]0;$ $\frac{1}{3}\left[\cup\right]243;\infty\left[\right.$. 1071. $]0;\ 0{,}5[\cup]5;\ \infty[$. 1072. $]0{,}01;\ \infty[$. 1073. $]1;\ 5[$. 1074. $]0{,}25;\ 1[\cup]1;\ 4[$. 1075. $]-\infty;\ \log_4(-1+\sqrt{5})[\cup]1{,}5;\ \infty[$. 1076. $\left]\log_3\frac{28}{27};\ \log_3 4\right[$. 1077. $]4^{-7};\ 4[$. 1078. $]1;\ \infty[$. 1079. $]\log_{1,5}\frac{3\sqrt{2}}{4};$ $1{,}5[$. 1080. $\left[\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt[5]{4}}\left[\cup\right]1;\ \sqrt{2}\right]$. 1081. $[0{,}5;\ 1[$. 1082. $]3;\ \infty[$. 1083. $]0;\ 2[\cup]4;\ \infty[$. 1084. $]2^{-\sqrt{2}};\ \frac{1}{2}\left[\cup\right]1;\ 2^{\sqrt{2}}\left[\right.$. 1085. $]-\sqrt{3};$

$-1{,}5\,[\cup]\,1{,}5;\ \sqrt{3}\,[$. 1086. $\left[-1;\ -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right[\ \cup\ \left]\frac{2\sqrt{5}}{5};\ 1\right]$.
1087. $]-0{,}5;\ 2\,[$ 1088. $\left]\frac{1}{3};\ 3\right[$. 1089. $]\,2^{-28};\ 1\,[$. 1090. $]-\infty;\ 0\,[\cup]\,1;\ \infty\,[$. 1091. $]\,4;\ 10\,[$ 1092. $]-\sqrt{2};\ -1\,[\cup]\,1;\ \sqrt{2}\,[$. 1093. $]\log_2\sqrt{13};\ 2]$. 1094. $]\,0;\ 4\,[$ 1095. $]-\infty;\ \frac{7}{3}\,[\cup]\,3;\ \infty\,[$. 1096. $]\,0;\ 0{,}5\,[\cup]\,2;\ 3\,[$. 1097. $]-\infty,\ 0\,[\cup]\,1;\ 2\,[\cup]\,2;\ 3\,[\cup]\,4;\ \infty\,[$. 1098. $]-3;\ -2\,[\cup]-1;\ 0[$. 1099. $]\,5;\ \infty\,[$ 1100. $]-2;\ 13\,[$. 1101. $]\,13;\ 29\,[$. 1102. $]\,40;\ 41\,[\cup]\,48;\ \infty\,[$. 1103. $]-3;\ 2{,}96]\cup[22;\ \infty\,[$. 1104. $]\,0;\ \frac{1}{\sqrt{6}}\,]\cup[1;\ \infty\,[$. 1105. $]-1;\ 0{,}5\times\times[\cup]\,0,\ 1\,[$. 1106. $]-\infty;\ 0]\cup[\log_6 5;\ 1\,[$. 1107. $]-\infty;\ 0]\cup[\log_2 3;\ 2\,[$. 1108. $[0{,}2,\ 5]$. 1109. $]\,3;\ \infty\,[$. 1110. $]-1;\ 0\,[\cup[1;\ \infty\,[$. 1111. $]\,0;\ 1\,[\cup[2;\infty\,[$. 1112. $]\,0,\ 1\,[\cup[2;\ \infty\,[$. 1113. $]-1;\ 0\,[\cup]\,1{,}5;\ 2\,[$. 1114. $[\log_3 0{,}9;\ 2\,[$. 1115. $]\,0{,}5;\ 1\,[$. 1116. $\left]-\frac{1}{2};\ 0\right[$. 1117. $]\,1;\ 1{,}5\,[$ 1118. $]-1;\ 0\,[\cup]\,1;\ 3\,[$.
1119. $]-\infty,\ \infty\,[$ con $a=1$; $\frac{a+3}{a-1}$ con $a\neq 1$. 1120. $]-\infty;\ \infty\,[$ con $a=1$; $\varnothing$ con $a=2$, $a=-2$; $\frac{1}{a^2-4}$ con $\begin{cases} a\neq 1\\ a\neq 2\\ a\neq -2.\end{cases}$ 1121. $\varnothing$ con $a=-3$, $a=-1{,}5$, $a=0$; $-\frac{a(a^2+3a-9)}{3(2a+3)}$ con $\begin{cases} a\neq -3\\ a\neq -1{,}5\\ a\neq 0.\end{cases}$ 1122. $\varnothing$ con $a\neq -2$, $a=-1$; $-2a^2-3a$ con $\begin{cases} a\neq -2\\ a\neq -1.\end{cases}$ 1123. $\varnothing$ con $a=-3$, $a=8$, $a=2$; $\frac{6-a}{a+3}$ con $\begin{cases} a\neq -3\\ a\neq 0\\ a\neq 2.\end{cases}$ 1124. 0 con $a=0$; $x_1=a$, $x_2=3a$ con $a\neq 0$. 1125. -2 con $a=0$, $\varnothing$ con $a<-\frac{1}{4}$; -3 con $a=-\frac{1}{4}$; $\frac{1-2a\pm\sqrt{4a+1}}{2a}$ con $-\frac{1}{4}<a<0$, $a>0$. 1126. $-\frac{1}{5}$ con $a=\frac{1}{2}$; $\varnothing$ con $-9-\sqrt{84}<a<-9+\sqrt{84}$; $\frac{3a+1\pm\sqrt{a^2+18a-3}}{2a-1}$ con $a\leqslant -9-\sqrt{84}$, $-9+\sqrt{84}\leqslant a<\frac{1}{2}$, $a>\frac{1}{2}$. 1127. $-\frac{1}{3}$ con $a=-2$; 0 con $a=1$; $x_1=\frac{1-a}{2+a}$, $x_2=\frac{1+a}{1-a}$ con $\begin{cases} a\neq -2\\ a\neq 1.\end{cases}$ 1128. $\varnothing$ con $6-2\sqrt{21}<a<6+2\sqrt{21}$; $\frac{-a\pm\sqrt{a^2-12a-48}}{6}$ con $a\leqslant 6-2\sqrt{21}$, $a\geqslant 6+2\sqrt{21}$. 1129. -1 con $a=-2$, $a=1$; $x_1=a+1$, $x_2=a-2$ con $\begin{cases} a\neq -2\\ a\neq 1.\end{cases}$ 1130. $\varnothing$ con $a=0$; a con $a\neq 0$. 1131. $\varnothing$ con $a=0$; $-1{,}5$ con $a=1$; 1 con $a=-\frac{2}{3}$; $x_1=1$, $x_2=-\frac{a+2}{2}$ con $\begin{cases} a\neq -\frac{2}{3}\\ a\neq 0\\ a=1.\end{cases}$
1132. $\varnothing$ con $a\neq 1$; $]-\infty;\ -2\,[\cup]-2;\ -1\,[\cup]-1;\ 1\,[\cup]\,1;\ 2\,[\cup]\,2;$

∞ [con $a=1$. 1133. 0 con $a\geqslant-\sqrt{3}$; $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{(a+\sqrt{3})^2}$ con $a<-\sqrt{3}$.
1134. $\varnothing$ con $a<0$, $0<a<1$; 0 con $a=0$; $\frac{(a-1)^2}{4}$ con $a\geqslant 1$. 1135. $\varnothing$ con $a<0$, $\frac{1}{2}\leqslant a<1$; $\frac{a^2}{2a-1}$ con $0\leqslant a<\frac{1}{2}$, $a\geqslant 1$. 1136. $\varnothing$ con $a>-4$; $\frac{a^2+24a+16}{16}$ con $a\leqslant-4$. 1137. $-a\sqrt{3}$ con $a<0$; $a\sqrt{3}$ con $a\geqslant 0$. 1138. $\varnothing$ con $a<0$; $-a$ con $a\geqslant 0$. 1139. $\varnothing$ con $a\leqslant 1$; $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2-1}}$ con $a>1$. 1140. $\varnothing$ con $|a|\geqslant\frac{1}{2}$; $\frac{4a^2+1}{4}$ con $|a|<\frac{1}{2}$. 1141. $\pm\frac{a+\sqrt{a^2-16a+60}}{15-4a}$ con $a<\frac{15}{4}$; $\varnothing$ con $a\geqslant\frac{15}{4}$.
1142. $\varnothing$ con $a\leqslant 0$, $a>3$; $1\pm\sqrt{1-2\log_9 a}$ con $0<a\leqslant 3$. 1143. $\varnothing$ con $a>1$; 0 con $a=1$; $\pm\log_{12}(1+\sqrt{1-a})$ con $a<1$. 1144. $\varnothing$ con $a\leqslant 3$, $a\geqslant 27$; $\log_4\frac{a-27}{3-a}+2$ con $3<a<27$. 1145. $\varnothing$ con $a\leqslant 0$; $2000a^{-\frac{10}{3}}$ con $a>0$.
1146. $\varnothing$ con $a\leqslant 1$, $a>100$; $\frac{2\pm\sqrt{4-2\log a}}{2}$ con $1<a\leqslant 100$.
1147. $\varnothing$ con $a\leqslant 0$, $a=1$; a^6 con $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1.\end{cases}$ 1148. $\varnothing$ con $a\leqslant 0$, $a=1$, $a\geqslant 2\sqrt{2}$; $4-a^2$ con $0<a<1$, $1<a<2\sqrt{2}$. 1149. $\varnothing$ con $a\leqslant 0$, $a\geqslant 1$; $\frac{1+a^2}{1-a^2}$ con $0<a<1$. 1150. $\varnothing$ con $a\leqslant 0$, $a=1$; $x_1=a^2$, $x_2=\frac{1}{2}$ con $0<a<1$, $a>1$. 1151. $\varnothing$ con $a=0$;] 0; 6 [con $a=1$; 2 con $\begin{cases} a\neq 0 \\ a\neq 1.\end{cases}$
1152. $\varnothing$ con $a=0$; $x>0$ con $a=1$; 3^n, donde $n=\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$ ... con $a=-1$; $x_1=3$, $x_2=\frac{1}{3}$ con $\begin{cases} a\neq 0 \\ a\neq -1 \\ a\neq 1.\end{cases}$ 1153. $\varnothing$ con $a\in R$
1154. $\varnothing$ con $a\leqslant 0$; $a=1$, $a=2$; $a+2$ con $0<a<1$, $1<a<2$, $a=3$; $x_1=a-2$, $x_2=a+2$ con $2<a<3$, $a>3$. 1155. $\varnothing$ con $a\leqslant 1$, $a=\sqrt{2}$; 3 con $a=2$; $x_1=a-1$, $x_2=a+1$, con $1<a<\sqrt{2}$, $\sqrt{2}<a<2$, $a>2$. 1156. $\varnothing$ con $a=-1$; $\left(\frac{3}{a+1};\ \frac{-3}{a+1}\right)$ con $a\neq -1$. 1157. $\varnothing$ con $a=-7$; $\left(t;\ \frac{5-4t}{3}\right)$, donde $t\in R$, con $a=3$; $\left(\frac{5(a-3)}{a^2+4a-21};\ \frac{10(a-3)}{a^2+4a-21}\right)$ con $\begin{cases} a\neq -7 \\ a\neq 3.\end{cases}$ 1158. $\varnothing$ con $a=-1$; $(t;\ 1-t)$, donde $t\in R$, con $a=1$; $\left(\frac{1+a+a^2}{a+1};\ \frac{-a}{a+1}\right)$ con $\begin{cases} a\neq 1 \\ a\neq -1.\end{cases}$
1159. $(0;\ a)$, $(a;\ 0)$ con $a\in R$. 1160. $(a;\ 2a)$, $(2a;\ a)$ con $a\in R$. 1161. $(t_1;\ t_2;\ 1-t_1-t_2)$, donde $t_1\in R$, $t_2\in R$, con $a=1$; $(-1-a;\ 1;\ a+1)$ con $a\neq 1$.
1162. $(t;\ at;\ 2at)$, donde $t\in R$, con $a\in R$. 1163. $\varnothing$ con $a<0$; $(9a^2;\ a^2)$ con $a\geqslant 0$.
1164. $\varnothing$ con $a<1$; $\left(\frac{(a+1)^2}{4};\ \frac{(a-1)^2}{4}\right)$ con $a\geqslant 1$. 1165. $\varnothing$ con $a=-1$;]$-\infty$; $1-a$ [con $a>-1$;] $1-a$; ∞ [con $a<-1$. 1166.]$-\infty$; ∞ [con $a=\frac{5}{9}$;]$-\infty$; $\frac{63}{9a-5}$[con $a>\frac{5}{9}$;]$\frac{63}{9a-5}$; ∞[con $a<\frac{5}{9}$.

1167. $\varnothing$ con $a=-3$, $a=1$, $a=3$; $\left]-\infty;\ \frac{a+1}{a-3}\right[$ con $a<-3$, $1<a<3$, $a>3$; $\left]\frac{a+1}{a-3};\ \infty\right[$ con $-3<a<1$. 1168. $]-\infty;\ 8[$ con $a=10$; $\left]\frac{3+16a}{2(10-a)};\ \frac{4a}{5}\right[$ con $a>10$; $\left]-\infty;\ \frac{4a}{5}\right[\cup\left]\frac{3a+16}{2(10-a)};\ \infty\right[$ con $a<10$. 1169. $]-\infty;\ \infty[$ con $a=-3$; $\left]\frac{-14}{a+3};\ \frac{4}{a+3}\right[$ con $a>-3$; $\left]\frac{14}{a+3};\ \frac{-4}{a+3}\right[$ con $a<-3$. 1170. $\left]-\infty;\ \frac{1}{4}\right[$ con $a=-\frac{2}{5}$; $\varnothing$ con $a>\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$ con $a=\frac{2}{3}$; $]-\infty;\ \infty[$ con $a\leqslant-\frac{2}{3}$; $]-\infty;\ x_1[\cup]x_2;\ \infty[$ con $-\frac{2}{3}<a<-\frac{2}{5}$; $]x_2;\ x_1[$ con $-\frac{2}{5}<a<\frac{2}{3}$, donde $x_1=\frac{-a-2+\sqrt{4-9a^2}}{5a+2}$, $x_2=\frac{-a-2-\sqrt{4-9a^2}}{5a+2}$.
1171. $\varnothing$ con $a=-\frac{3}{2}$; $\left]\frac{1}{(2a+3)^2};\ \infty\right[$ con $a>-\frac{3}{2}$; $\left]0;\ \frac{1}{(2a+3)^2}\right[$ con $a<-\frac{3}{2}$.
1172. $\varnothing$ con $a=2$; $\left[\frac{1}{3};\ \frac{a-1}{3}\right[$ con $a>2$; $\left]\frac{a-1}{3};\ \frac{1}{3}\right]$ con $a<2$.
1173. $\varnothing$ con $a\leqslant 0$; $]1-2\sqrt{a};\ 1+2\sqrt{a}[$ con $0<a\leqslant 1$; $[a;\ 1+2\sqrt{a}[$ con $a>1$. 1174. $[1;\ \infty[$ con $a\leqslant 0$; $\left[1;\ \frac{(1+a^2)^2}{4a^2}\right[$ con $0<a<1$; $\varnothing$ con $a\geqslant 1$. 1175. $\varnothing$ con $a\leqslant -1$; $\left]\frac{a^2}{1+2a};\ -1\right]$ con $-1<a<-\frac{1}{2}$; $]-\infty;\ -1]$ con $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 0$; $]-\infty;\ -1]\cup\left[0;\ \frac{a^2}{1+2a}\right[$ con $a>0$.
1176. $\varnothing$ con $a\leqslant 0$, $a\geqslant 4$; $]-2;\ 2[$ con $a=2$; $[-a;\ a]$ con $0<a<2$; $\left]-\frac{a}{2}\sqrt{4a-a^2};\ \frac{a}{2}\sqrt{4a-a^2}\right[$ con $2<a<4$. 1177. $\varnothing$ con $a\leqslant -1$; $\left[-1;\ \frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}\right[$ con $-1<a\leqslant 1$; $\left[-1;\ \frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}\right]\cup\left[\frac{a+\sqrt{2-a^2}}{2};\ 1\right]$ con $<a\leqslant\sqrt{2}$; $[-1;\ 1]$ con $a>\sqrt{2}$. 1178. $[a;\ 0]$ con $a<0$; $\varnothing$ con $a=0$; $]0;\ a[$ con $a>0$. 1179. $\left[a\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\ 0\right]$ con $a<0$; $\left[a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\ 2a\right]$ con $a\geqslant 0$. 1180. $\varnothing$ con $a\leqslant 0$, $a=1$; $\left]1;\ \frac{1+\sqrt{1+a^2}}{2}\right[$ con $0<a<1$; $\left]\frac{1+\sqrt{1+a^2}}{2};\ \infty\right[$ con $a>1$. 1181. $]1-\sqrt{9-a};\ 1-\sqrt{1-a}[\cup]1+\sqrt{1-a};\ 1+\sqrt{9-a}[$ con $a\leqslant 1$; $]1-\sqrt{9-a};\ 1+\sqrt{9-a}[$ con $1<a<9$; $\varnothing$ con $a\geqslant 9$. 1182. $\left]1;\ \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right[$ con $a<0$; $\left]a;\ \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right[\cup\left]\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2};\ 1\right[$ con $0<a\leqslant\frac{1}{4}$; $\varnothing$ con $a=0$, $a\geqslant 1$; $]a;\ 1[$ con $\frac{1}{4}<a<1$. 1183. $\varnothing$ con $a\leqslant 0$, $a=1$; $]2;\ 3[$ con $0<a<1$, $a>1$. 1184. $\varnothing$ con $a\leqslant 0$, $a=1$; $]a;\ 1[\cup\left]\frac{1}{a};\ \infty\right[$ con $0<a<1$; $\left]\frac{1}{a};\ 1\right[$ con $a>1$. 1185. $\varnothing$ con $a\leqslant 1$; $]2-\sqrt{4-\log a};\ 1[\cup]2+\sqrt{4-\log a};\ \infty[$ con $1<a<1000$; $]3;\ \infty[$ con $a=1000$; $]1;\ 2-\sqrt{4-\log a}[\cup]2+\sqrt{4-\log a};\ \infty[$ con $1000<a<10\,000$; $]1;\ 2[\cup]2,\ \infty[$ con $a=10\,000$; $]1;\ \infty[$ con $a>10\,000$. 1186. $\varnothing$ con $a\leqslant 0$,

$a=\frac{1}{2}$; $]1-\sqrt{1-a};\ 1+\sqrt{1-a}[$ con $0<a<\frac{1}{2}$; $]1-\sqrt{1+a},\ 1-\sqrt{1-a}[\ \cup$ $\cup]\ 1+\sqrt{1-a};\ 1+\sqrt{1+a}[$ con $\frac{1}{2}<a\leqslant 1$; $]1-\sqrt{1+a};\ 1+\sqrt{1+a}[$ con $a>1$. 1187. $a>\frac{11}{9}$; 1188. $2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant\frac{11}{3}$. 1189. $a\geqslant 2$. 1190. $\frac{1}{2}<a<1$. 1191. $0<a<\frac{1}{3}$. 1192. $a<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $a>1$. 1193. $-1<a<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 1194. $a<2$; $a>\frac{7}{3}$. 1195. $-\sqrt{2}<a<-\frac{16}{17}$; $0<a<\sqrt{2}$. 1196. $-1<a<$ $<\frac{1-\sqrt{3}}{2}$; $1<a<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. 1197. $a\leqslant -2$; $a\geqslant 0$. 1198. $a\leqslant -\frac{1}{2}$; $a\geqslant 1$. 1199. $a=1$; $a=2$; $5\leqslant a\leqslant 6$. 1200. $-6\leqslant a<-4$; $-3<a<-1$; $a=1$. 1201. $-6\leqslant a\leqslant -5$; $a=-2$; $a=-1$. 1202. $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant -\frac{3}{22}$; $a=1$. 1203. $2\cos\alpha$. 1204. $-\frac{\cos 2\beta}{\operatorname{sen}^2\beta}$. 1205. $\frac{1}{\cos\alpha}$. 1206. $\operatorname{tg}2\alpha$. 1207. $\operatorname{sen}2\alpha$. 1208. 1. 1209. 1. 1210. 1. 1211. $\operatorname{tg}3\alpha$. 1212. $\operatorname{tg}4\alpha$. 1213. $\operatorname{tg}n\alpha$. 1214. $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$. 1215. $8\cos^4\alpha$. 1216. $\operatorname{tg}\alpha$. 1217. $\operatorname{tg}^4\alpha$. 1218. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\alpha$. 1219. $\cos\left(\frac{\alpha}{2}+30°\right)$. 1263. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 1264. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 1265. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. 1266. $2-\sqrt{3}$. 1267. $\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. 1268. $\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. 1269. $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. 1270. 0. 1271. $\frac{3}{16}$. 1272. 1. 1273. 4. 1274. $\operatorname{sen}\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}$. 1275. $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{4}$. 1276. $\cos\alpha=\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{12}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{5}{12}$. 1277. $\operatorname{sen}2\alpha=\frac{120}{169}$, $\cos 2\alpha=\frac{-119}{169}$ $\operatorname{tg}2\alpha=-\frac{120}{119}$, $\operatorname{ctg}2\alpha=-\frac{119}{120}$. 1278. $\frac{125}{78}$. 1279. $\frac{5-12\sqrt{3}}{26}$. 1281. a) m^2-2; b) $m(m^2-3)$; c) $\pm\sqrt{m^2-4}$. 1282. a) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=$ $=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$; b) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\frac{4}{5}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=$ $=-\frac{4}{3}$. 1283. $\frac{4}{5}$. 1285. $\frac{\sqrt{7}-2}{3}$. 1323. $\frac{5}{12}\pi$. 1324. -1. 1325. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 1326. $\frac{1}{2}$. 1327. $\frac{\pi}{4}$. 1328. $0{,}3\pi$. 1329. $-\frac{\pi}{3}$. 1330. $\frac{\pi}{4}$. 1331. $-\frac{2\pi}{3}$. 1332. $\frac{6}{7}\pi$. 1333. π. 1334. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 1335. 0,2. 1336. $\frac{\sqrt{33}}{11}$. 1337. 0. 1338. $\frac{13}{85}$. 1339. $\frac{8\sqrt{5}}{81}$. 1340. $xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$. 1341. $xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$. 1342. $\frac{x+y}{1-xy}$. 1343. $\frac{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy}$. 1344. $2x\sqrt{1-x^2}$. 1345. $\frac{2x}{1-x^2}$. 1346. $\frac{1-x^2}{1+x^2}$. 1347. $\frac{2x}{1+x^2}$. 1348. $\frac{x^2-1}{x^2+1}$. 1349. $\sqrt{\frac{1+x}{2}}$. 1350. $\frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x}$. 1432. $\varnothing$.

1433. $\varnothing$. **1434.** $\frac{\pi}{3}k$. **1435.** $\frac{\pi}{2}k$. **1436.** $\frac{\pi}{2}+2\pi k$. **1437.** $2\pi k$. **1438.** $\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi k$.
1439. $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$; $-\frac{\pi}{4}+\pi k$. **1440.** $\frac{2\pi}{3}k$; $\pm\arccos\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}+2\pi n$.
1441. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$. **1442.** $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **1443.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$. **1444.** πk;
$(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$. **1445.** $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k$. **1446.** $2\pi k$; $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}n$. **1447.** $\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi k$;
$-\frac{\pi}{4}+2\pi n$. **1448.** $\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}k$. **1449.** $\frac{\pi}{40}+\frac{\pi}{10}k$; $\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{5}n$. **1450.** $-\frac{\pi}{6}+$
$+\frac{2\pi}{3}k$. **1451.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$. **1452.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **1453.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$.
1454. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$. **1455.** $\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$. **1456.** $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi k$.
1457. $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi k$. **1458.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $-\operatorname{arctg}2+\pi n$. **1459.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\operatorname{arctg}3+\pi n$.
1460. $\operatorname{arctg}(-1\pm\sqrt{3})+\pi k$. **1461.** $\operatorname{arctg}\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}+\pi k$. **1462.** $\frac{\pi}{4}k$; $\frac{\pi}{24}+$
$+\frac{\pi}{12}n$. **1463.** $\frac{\pi}{3}k$; $\frac{\pi}{2}+\pi n$. **1464.** $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k$. **1465.** $\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{7}k$; $\frac{\pi}{3}+$
$+\frac{2\pi}{3}n$. **1466.** $\frac{\pi}{2}k$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$. **1467.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n$. **1468.** $\frac{\pi}{6}\pm$
$\pm\frac{\pi}{8}+\pi k$. **1469.** $\frac{\pi}{6}+\pi k$; $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}n$. **1470.** $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}k$. **1471.** $-\frac{\pi}{32}+\frac{\pi}{4}k$;
$\frac{\pi}{72}+\frac{\pi}{9}n$; **1472.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi n$. **1473.** πk; $\frac{\pi}{4}+\pi n$. **1474.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$;
$\operatorname{arctg}7+\pi n$; $\operatorname{arctg}3+\pi m$. **1475.** $-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\pi k$. **1476.** $\frac{\pi}{2}k$. **1477.** $\varnothing$. **1478.** $\varnothing$.
1479. $\varnothing$. **1480.** $\varnothing$. **1481.** $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **1482.** $\pi+2\pi k$; $2\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+2\pi n$.
1483. $\operatorname{arctg}\frac{3\pm\sqrt{6}}{3}+\pi n$. **1484.** $\frac{\pi}{2}k$; $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2+\pi n$. **1485.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$.
1486. $2\pi k$; $2\operatorname{arctg}(-2)+2\pi n$. **1487.** $\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $2\pi n$. **1488.** $\varnothing$. **1489.** $\frac{\pi}{2}+2\pi k$;
$\pi+2\pi n$. **1490.** $2\pi k$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$. **1491.** $\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}+2\pi k$. **1492.** $\pm\frac{2\pi}{3}+$
$+2\pi k$. **1493.** $\frac{2\pi k}{15}\left(k\neq\frac{15l}{2}\right)$; $\frac{\pi}{17}+\frac{2\pi}{17}n$ $(n\neq 17m+8)$. **1494.** $-\frac{\pi}{66}+$
$+\frac{\pi}{11}k$; $\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{6}n$. **1495.** $\pi+2\pi k$; $(-1)^n\frac{\pi}{2}+2\pi n$. **1496.** $2\pi+4\pi k$; $(-1)^n\times$
$\times\frac{2\pi}{3}+4\pi n$. **1497.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$. **1498.** $\frac{7\pi}{12}+\pi k$. **1499.** $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **1500.** $3\pi k$;
$\pm\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}n$. **1501.** $-\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+2\pi n$. **1502.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$;
$\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+\pi n$. **1503.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $(-1)^n\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{\pi}{2}n$.
1504. $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}+2\pi n$. **1505.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$. **1506.** $\pm\frac{\pi}{12}+$

$+\frac{\pi}{4}k$. 1507. $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}k$. 1508. $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}k$. 1509. $2\pi k$; $\frac{5\pi}{4}+2\pi n$. 1510. $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. 1511. $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. 1512. $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$. 1513. $\frac{\pi}{4}+\pi k$. 1514. $\varnothing$. 1515. $-\operatorname{arctg}\frac{1}{6}+\pi k$; $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n$. 1516. $\frac{\pi}{2}+2\pi k$. 1517. $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$. 1518. $-\frac{3\pi}{8}+\pi k$. 1519. $\frac{\pi}{4}+2\pi k$; $-\operatorname{arctg}3+\pi(2n+1)$. 1520. $\frac{5\pi}{4}+2\pi k$; $\operatorname{arctg}3+\pi(2n+1)$. 1521. $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $2\pi n$. 1522. $\varnothing$. 1523. $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+\pi k$; $\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+\pi n$. 1524. $\varnothing$. 1525. $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}n$. 1526. $\pi+4\pi k$. 1527. $\pi+2\pi k$. 1528. $\frac{\pi}{2}+2\pi k$. 1529. $\frac{3\pi}{2}+3\pi k$. 1530. $\frac{\pi}{6}+\pi k$. 1531. $\varnothing$. 1532. $2\pi+24\pi k$. 1533. $\varnothing$. 1534. πk. 1535. 0. 1536. $\frac{\pi}{4}+2\pi k$. 1537. πk. 1538. $\pm\frac{1}{6}+k$ $(k\in Z)$. 1539. $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\pm\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$. 1540. 1; 2. 1541. $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$. 1542. $\operatorname{sen}\frac{1}{2}$. 1543. $\operatorname{tg}\frac{2}{5}\pi$. 1544. 0. 1545. $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. 1546. 0. 1547. $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. 1548. $\frac{2}{5}$. 1549. $\frac{1}{2}$. 1550. 4. 1551. $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$. 1552. $(k;\ 0)$ $(k;\ 2)$, $k\in Z$. 1553. $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$. 1554. $\left(-1;\ 1+\frac{\pi}{4}(2n+1)\right)$. 1555. $\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k;\ \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}n\right)$. 1556. $\left(1;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $\left(-1;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$. 1557. $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$. 1558. $\left(\pi k;\ \frac{\pi}{2}n;\ -\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}m\right)$. 1559. (2; 7), (4; −13), (1; 2), (5; −8), (8; −5), (13; −4). 1560. $\left(\frac{\pi}{2}(k+n);\ \frac{\pi}{2}(k-n)\right)$. 1561. $\left(\frac{\pi}{6}+\pi(k-n);\ \frac{\pi}{3}+\pi(k+n)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi(k-n);\ \frac{2\pi}{3}+\pi(k+n)\right)$. 1562. $\left((-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$, $\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$. 1563. $\left(\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \frac{\pi}{6}-\pi n\right)$. 1564. $\left((-1)^k\times\arcsen\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k;\ \arccos(2-\sqrt{2})+2\pi n\right)$, $\left((-1)^k\arcsen\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k;\ -\arccos(2-\sqrt{2})+2\pi n\right)$. 1565. $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$. 1566. $(t;\ t-\pi(2n+1))$, donde $t\in R$. 1567. $\left(\frac{1}{6}+k;\ -\frac{1}{6}+k\right)$, donde $k\in Z$. 1568. $\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\ -\pi k\right)$, $\left(\pi k;\ \frac{\pi}{3}-\pi k\right)$. 1569. $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{3}-\pi k\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}-\pi k\right)$. 1570. $\left(\pi k;\ \frac{\pi}{4}-\pi k\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4}+\pi k;\ -\frac{\pi}{2}-\pi k\right)$. 1571. $\left(\frac{\pi}{2}+\right.$

$+4\pi k;\ 2\pi+4\pi n\Big)$, $\Big(-\frac{\pi}{2}+4\pi k;\ 2\pi+4\pi n\Big)$, $\Big(2\pi+4\pi k;\ \frac{\pi}{2}+4\pi n\Big)$, $\Big(2\pi+4\pi k;\ -\frac{\pi}{2}+4\pi n\Big)$. **1572.** $\Big(\pi k;\ \frac{3\pi}{4}-\pi k\Big)$, $\Big(\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}-\pi k\Big)$. **1573.** $\Big(\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi}{2}k;\ \frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}k\Big)$. **1574.** $\varnothing$. **1575.** $\Big(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\Big)$. **1576.** $\Big(\frac{\pi}{6}+\pi(n+k);\ \frac{\pi}{6}+\pi(n-k)\Big)$, $\Big(-\frac{\pi}{6}+\pi(n+k);\ -\frac{\pi}{6}+\pi(n-k)\Big)$. **1577.** $(\alpha+\pi(k+n);\ -\beta+\pi(k-n))$, $\Big(\frac{\pi}{2}-\beta+\pi(k+n);\ -\frac{\pi}{2}+\alpha+\pi(k-n)\Big)$, $\Big(\frac{\pi}{2}+\beta+\pi(k+n);\ \frac{\pi}{2}-\alpha+\pi(k-n)\Big)$, $(\pi-\alpha+\pi(k+n);\ \beta-\pi(k-n))$. donde $\alpha=\frac{1}{2}\Big(\operatorname{arcsen}\frac{2}{5}+\operatorname{arcsen}\frac{4}{5}\Big)$, $\beta=\frac{1}{2}\Big(\operatorname{arcsen}\frac{4}{5}-\operatorname{arcsen}\frac{2}{5}\Big)$.

1578. $\Big(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\Big)$. **1579.** $(\alpha+\pi(n+k);\ \beta+\pi(n-k))$, $((\beta+\pi(n+k);\ \alpha+\pi(n-k))$, $((-\beta+\pi(n+k);\ -\alpha+\pi(n-k))$, $(-\alpha+\pi(n+k);\ -\beta+\pi(n-k))$, donde $\alpha=\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\pi}{8}$, $\beta=\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\pi}{8}$. **1580.** $(\pi k;\ \pi n)$, $(\alpha+\pi k;\ \beta+\pi n)$; $(-\alpha+\pi k;\ -\beta+\pi n)$, donde $\alpha=\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\beta=\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{9}$ y k, n son los números de la misma paridad. **1581.** $\Big(\alpha+\pi k;\ \frac{\pi}{4}-\alpha-\pi k\Big)$, $\Big(\beta+\pi k;\ \frac{\pi}{4}-\beta-\pi k\Big)$, donde $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{-7+\sqrt{97}}{8}$, $\beta=-\operatorname{arctg}\frac{7+\sqrt{97}}{8}$. **1582.** $\Big(\frac{\pi}{4}+\pi k;\ -\frac{\pi}{12}-\pi k\Big)$, $\Big(-\frac{\pi}{12}+\pi k;\ \frac{\pi}{4}-\pi k\Big)$. **1583.** $\Big(\frac{3\pi}{2}+\pi k;\ -\frac{\pi}{6}+\pi n\Big)$. **1584.** $\Big(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\pi k\Big)$, $\Big(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k;\ \frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}-\pi k\Big)$, $\Big(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\pi k;\ \operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k\Big)$, $\Big(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}-\pi k;\ \operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k\Big)$. **1585.** $\Big(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\Big)$, $\Big(\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\Big)$, $\Big(-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ -\frac{\pi}{4}+2\pi n\Big)$, $\Big(-\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ -\frac{3\pi}{4}+2\pi n\Big)$. **1586.** $\Big((-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k;\ (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\operatorname{arctg}\frac{5}{2}+\pi(k-n)\Big)$. **1587.** $\Big(\frac{\pi}{2}(k-n);\ \frac{\pi}{2}n\Big)$, $\Big(-\frac{\pi}{6}+\pi(k-2n);\ \frac{\pi}{3}+\pi n\Big)$, $\Big(\frac{7\pi}{6}+\pi(k-2n);\ -\frac{\pi}{3}+\pi n\Big)$. **1588.** $\Big(\frac{\pi}{2}k;\ \pi(n+k)\Big)$. **1589.** $\Big(-\frac{\pi}{6}+(-1)^k\alpha+\frac{\pi}{2}k;\ \frac{\pi}{6}+(-1)^k\alpha+\frac{\pi k}{2}\Big)$, donde $\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{2-3\sqrt{3}}{6}$. **1590.** $\Big(2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\Big)$, $\Big(\pi+2\pi k;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n\Big)$, $\Big(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\Big)$, $\Big(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\Big)$, $\Big(\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n\Big)$, $\Big(-\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\ -\frac{\pi}{6}+2\pi n\Big)$. **1591.** $\Big(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{6}-\pi k\Big)$. **1592.** $\Big(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\Big)$, $\Big(-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n\Big)$. **1593.** $(2\pi k;\ \pi+2\pi n)$.

1594. $\left(\frac{7\pi}{24}+\pi(k+n);\ \frac{\pi}{24}+\pi(k-n)\right)$, $\left(\frac{\pi}{24}+\pi(k+n);\ \frac{7\pi}{24}+\pi(k-n)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{24}+\pi(k+n);\ -\frac{7\pi}{24}+\pi(k-n)\right)$, $\left(-\frac{7\pi}{24}+\pi(k+n);\ -\frac{\pi}{24}+\pi(k-n)\right)$.
1595. $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(k+n);\ \frac{\pi}{2}+\pi(k-n)\right)$. 1596. $\left(\frac{\pi}{6}+\pi k;\ -\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right)$. 1597. $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k;\ -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}+\right.$ $\left.+\frac{\pi}{2}k;\ -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}n\right)$. 1598. $(\pi k;\ 2\pi n)$, $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$.
1599. $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \operatorname{arctg}2+\pi n;\ \frac{3\pi}{4}-\operatorname{arctg}2-\pi(k+n)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k;\right.$ $\left.-\operatorname{arctg}2+\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+\operatorname{arctg}2-\pi(k+n)\right)$. 1600. $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \operatorname{arctg}2+\pi n;\right.$ $\left.\frac{3\pi}{4}-\operatorname{arctg}2-\pi(k+n)\right)$, $\left(\operatorname{arctg}2+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{3\pi}{4}-\operatorname{arctg}2-\pi(k+n)\right)$.
1601. $(\pi k;\ \pi n;\ \pi-\pi(k+n))$, $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}-2\pi(k+n)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}+\right.$ $\left.+2\pi k;\ -\frac{\pi}{6}-2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}-2\pi(k+n)\right)$. 1602. $\left(\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \frac{\pi}{6}+\pi n,\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}m\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}m\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}+\pi k;\ -\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}m\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi k;\ -\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}m\right)$. 1603. $\left(\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{7\pi}{6};\right.$ $\left.\frac{7\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{11\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right)$. 1604. 1) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{7\pi}{6}+2\pi k$; 2) $\frac{\pi}{6}+2\pi k<$ $<x<\frac{11\pi}{6}+2\pi k$; 3) $-\frac{\pi}{6}+\pi k\leqslant x<\frac{\pi}{2}+\pi k$; 4) $\frac{3\pi}{4}+\pi k\leqslant x<\pi+\pi k$.
1605. 1) $\pi-\operatorname{arcsen}\frac{1}{5}+2\pi k<x<2\pi+\operatorname{arcsen}\frac{1}{5}+2\pi k$; 2) $-\arccos(-0{,}7)+$ $+2\pi k\leqslant x\leqslant\arccos(-0{,}7)+2\pi k$; 3) $-\frac{\pi}{2}+\pi k<x\leqslant\operatorname{arctg}5+\pi k$; 4) $\pi k<x<$ $<\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\pi k$. 1606. $\frac{5\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{5\pi}{3}+2\pi k$. 1607. $-\frac{\pi}{3}+$ $+2\pi k<x\leqslant 2\pi k$; $\frac{\pi}{2}+2\pi k<x\leqslant\pi+2\pi k$. 1608. $\frac{\pi}{4}+2\pi k\leqslant x<\frac{5\pi}{6}+2\pi k$; $\pi+2\pi k<x\leqslant\frac{7\pi}{4}+2\pi k$. 1609. $\pi k<x<\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\frac{\pi}{2}+\pi k<x\leqslant\frac{2\pi}{3}+\pi k$.
1610. $\arccos\ \frac{1}{5}+2\pi k<x<\pi-\operatorname{arcsen}\frac{1}{5}+2\pi k$. 1611. $-\frac{\pi}{2}+2\pi k<x<$ $<\operatorname{arctg}3+2\pi k$; $\frac{\pi}{2}+2\pi k<x\leqslant\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)+2\pi k$; $\pi+\arccos\frac{3}{5}+2\pi k\leqslant$ $\leqslant x<\pi+\operatorname{arctg}3+2\pi k$. 1612. $\operatorname{arcctg}2+2\pi k<x<\operatorname{arcsen}\frac{4}{7}+2\pi k$; $\pi-\operatorname{arcsen}\frac{4}{7}+2\pi k<x<\pi+2\pi k$; $\pi+\operatorname{arcctg}2+2\pi k<x<2\pi+2\pi k$.
1613. $\operatorname{arcctg}0{,}3+\pi k\leqslant x<\frac{\pi}{2}+\pi k$. 1614. $\operatorname{arcsen}\frac{2}{3}+2\pi k<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi k$.
1615. $-\infty<x<\infty$. 1616. $\operatorname{arcctg}7+\pi k\leqslant x<\pi+\pi k$. 1617. $\operatorname{arcctg}\sqrt{2}+\pi k<$

$<x<\frac{7\pi}{6}+\pi k$. 1618. $-\sqrt{\frac{\pi}{3}}\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{3}}$; $\sqrt{2\pi k-\frac{\pi}{3}}\leqslant x\leqslant$ $\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi k}$; $-\sqrt{\frac{\pi}{3}+2\pi k}\leqslant x\leqslant-\sqrt{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}$, donde $k\in N$. 1619. $\frac{\pi}{3}+\pi k<x<\pi+\pi k$. 1620. $\frac{13\pi}{36}+\frac{2\pi}{3}k<x<\frac{19\pi}{36}+\frac{2\pi}{3}k$. 1621. $-\frac{\pi}{3}+2\pi k<x<\frac{\pi}{3}+2\pi k$. 1622. $\frac{\pi}{2}+2\pi k<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi k$. 1623. $\frac{\pi}{12}+$ $+\frac{2\pi}{3}k<x<\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}k$. 1624. $\pi k<x<\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\operatorname{arctg}3+\pi k<\frac{\pi}{2}+\pi k$. 1625. $\frac{\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $\frac{\pi}{2}+2\pi k<x<\frac{5\pi}{6}+2\pi k$. 1626. $-\frac{\pi}{2}+2\pi k<$ $<x<-\frac{\pi}{3}+2\pi k$; $\frac{\pi}{3}+2\pi k<x<\frac{\pi}{2}+2\pi k$. 1627. $-\frac{\pi}{3}+\pi k<x<\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\frac{\pi}{3}+\pi k<x<\frac{\pi}{2}+\pi k$. 1628. $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}k<x<\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}k$. 1629. $\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}+$ $+\pi k<x<\operatorname{arcctg}\left(-\frac{5}{12}\right)+\pi k$. 1630. $-\infty<x<\infty$. 1631. $-\frac{\pi}{3}+\pi k<$ $<x<\pi k$. 1632. $\frac{\pi}{4}+\pi k<x<\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi k$. 1633. $\frac{\pi}{6}+\pi k<x<\frac{\pi}{3}+$ $+\pi k$. 1634. $\frac{\pi}{2}k<x<\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k$. 1635. $-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k<x<-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k$. 1636. $-\frac{\pi}{4}+2\pi k<x<\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $\frac{\pi}{2}+2\pi k<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi k$. 1637. $-\frac{\pi}{2}+$ $+2\pi k<x<2\pi k$; $\frac{\pi}{4}+2\pi k<x<\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $\pi+2\pi k<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi k$. 1638. $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k<x<\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}k$. 1639. $-\frac{\pi}{3}+2\pi k\leqslant x<2\pi k$; $\frac{\pi}{3}+$ $+2\pi k\leqslant x<\pi+2\pi k$. 1640. $\frac{\pi}{6}+\pi k\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+\pi k$. 1641. $2\operatorname{arcctg}2+2\pi k<$ $<x<2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi k$. 1642. $\frac{\pi}{12}+2\pi k<x<\frac{3\pi}{4}+2\pi k$; $\frac{17\pi}{12}+2\pi k<$ $<x<\frac{7\pi}{4}+2\pi k$. 1643. $-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+\pi k<x<-\frac{\pi}{6}+\pi k$; $\pi k<x<\frac{\pi}{6}+$ $+\pi k$; $\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+\pi k<x<\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\frac{2\pi}{3}+\pi k<x<\frac{3\pi}{4}+\pi k$; $\frac{\pi}{3}+\pi k<$ $<x<\frac{\pi}{2}+\pi k$. 1644. $-\frac{\pi}{5}+2\pi k<x<2\pi k$; $2\pi k<x<\frac{\pi}{5}+2\pi k$; $\frac{2\pi}{5}+2\pi k<$ $<x<\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $\frac{3\pi}{5}+2\pi k<x<\frac{4\pi}{5}+2\pi k$; $\frac{6\pi}{5}+2\pi k<x<\frac{7\pi}{5}+2\pi k$; $\frac{3\pi}{2}+2\pi k<x<\frac{8\pi}{5}+2\pi k$. 1645. $-\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}k<x<-\frac{\pi}{30}+\frac{2\pi}{5}k$; $\frac{\pi}{10}+$ $+\frac{2\pi}{5}k<x<\frac{7\pi}{30}+\frac{2\pi}{5}k$. 1646. $-\frac{\pi}{3}+\pi k<x<-\frac{\pi}{9}+\pi k$; $\pi k<x<\frac{2\pi}{9}+\pi k$; $\frac{\pi}{2}+\pi k<x<\frac{5\pi}{9}+\pi k$. 1647. $-\frac{\pi}{4}+2\pi k<x<\frac{\pi}{6}+2\pi k$; $\frac{\pi}{4}+2\pi k<x<\frac{3\pi}{4}+$ $+2\pi k$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi k$. 1648. $-\frac{\pi}{8}+\pi k<x<\pi k$; $\frac{\pi}{2}+\pi k<x<\frac{5\pi}{8}+$ $+\pi k$; $\frac{\pi}{8}+\pi k<x<\frac{3\pi}{8}+\pi k$. 1649. $-\frac{7\pi}{12}+\pi k\leqslant x<-\frac{\pi}{2}+\pi k$; $-\frac{\pi}{2}+$

$+\pi k < x \leqslant \frac{\pi}{12}+\pi k$. 1650. $-\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}k < x < \frac{\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}k$. 1651. $-\frac{\pi}{3}+$
$+2\pi k < x < \frac{\pi}{3}+2\pi k$. 1652. $\frac{\pi}{2}+10\pi k < x < \frac{3\pi}{2}+10\pi k$; $\frac{10\pi}{3}+10\pi k < x <$
$< \frac{7\pi}{2}+10\pi k$; $\frac{9\pi}{2}+10\pi k < x < 5\pi+10\pi k$; $\frac{20\pi}{3}+10\pi k < x < \frac{25\pi}{3}+10\pi k$.
1653. $-\frac{\pi}{3}+2\pi k < x < \frac{\pi}{3}+2\pi k$; $\frac{8\pi}{3}+4\pi k < x < \frac{10\pi}{3}+4\pi k$. 1654. πk con $a <$
< -2, $a > 2$; $x_1 = \pi k$, $x_2 = \frac{1}{3}(-1)^k \operatorname{arcsen}\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}k$ con $-2 \leqslant a \leqslant 2$.
1655. $\varnothing$ con $a < -8$, $a > 8$; $\frac{\pi}{6}+(-1)^k \operatorname{arcsen}\frac{a}{8}+\pi k$ con $-8 \leqslant a \leqslant 8$.
1656. $x \in R$ con $a = 2\pi k$; $x_1 = \pi+2\pi k$, $x_2 = a+\pi+2\pi k$ con $a \neq 2\pi k$. 1657. $x \in R$
con $a = \pi+2\pi k$; $-\frac{a}{2}+(-1)^k \frac{\pi}{6}+\pi k$ con $a \neq \pi+2\pi k$. 1658. $x \in R$ con
$\begin{cases} a=0 \\ b=0; \end{cases}$ $x_1 = \frac{\pi}{2}+\pi k$, $x_2 = -\frac{\pi}{4}+\pi k$ con $a = -b \neq 0$; $x_1 = -\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2 =$
$= \operatorname{arctg}\frac{b-a}{b+a}+\pi k$ con $\begin{cases} a \neq -b \\ b \neq 0; \end{cases}$ $-\frac{\pi}{4}+\pi k$ con $\begin{cases} a \neq 0 \\ b = 0. \end{cases}$ 1659.
$\operatorname{arcsen}\frac{1-a}{\sqrt{2a^2+2}}+(-1)^k \operatorname{arcsen}\frac{a\sqrt{2}}{a^2+1}+\pi k$ con $a \in R$. 1660. $x \in R$ con $a = \pi k$;
$\frac{\pi}{4}+\pi k$ con $a \neq \pi k$. 1661. $2\pi k$ con a racional; 0 con a irracional. 1662. $\varnothing$
con $a < \frac{1}{4}$, $a > 1$; $\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{8a-5}{8}+\frac{\pi}{2}k$ con $\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 1$. 1663. $\varnothing$ con
$a < -2$, $a > 2$; $\frac{\pi}{4}+\pi k$ con $a = -2$; $\frac{1}{2}(-1)^k \operatorname{arcsen}(1-\sqrt{a+2})+\frac{\pi}{2}k$.

1664. $\varnothing$ con $a = \frac{\pi}{2}+\pi k$; $-\frac{\pi}{4}-a+\pi k$ con $\begin{cases} a \neq \frac{\pi}{2}+\pi k \\ a \neq -\frac{3\pi}{4}+\pi(k-n). \end{cases}$

1665. $x \in R$ con $\begin{cases} a \in R \\ b = 0; \end{cases}$ $x_1 = \frac{\pi}{2}+2\pi k$, $x_2 = 2\pi n$ con $\begin{cases} a \in R \\ b \neq 0 \end{cases}$ 1666. $\varnothing$ con
$\begin{cases} a \in R \\ b = 0; \end{cases}$ $x \neq \frac{\pi}{b}k$ con $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0; \end{cases}$ $x = \frac{\pi}{a}k$ $\left(\text{donde } k \in Z, \text{ pero } k \neq \frac{na}{b}\right)$ con $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \in R. \end{cases}$
1667. πk con $a < -1$, $a \geqslant 3$; $x_1 = \pi k$, $x_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a-1}{2}+\pi k$ con
$-1 \leqslant a < 3$. 1668. $\frac{\pi}{2}+\pi k$ con $a \leqslant -3$, $a > 1$; $x_1 = \frac{\pi}{2}+\pi k$, $x_2 = \pm\frac{1}{2}\times$
$\times\arccos\frac{a+1}{2}+\pi k$ con $-3 < a \leqslant 1$. 1669. $\varnothing$ con $a = \frac{\pi}{2}(2k-4n-1)$; $-\frac{a}{2}+$
$+\frac{\pi}{4}(2k+1)$ con $a \neq \frac{\pi}{2}(2k-4n-1)$. 1670. $\frac{\pi}{2}+\pi k$ con $a = \frac{\pi}{2}+\pi n$; $x_1 =$
$= \frac{\pi}{2}+\pi k$, $x_2 = -a+\frac{\pi}{2}+\pi k$ con $a \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$. 1671. $x_1 = \frac{\pi+2a}{14}+\frac{2\pi}{7}k$,
$x_2 = \frac{\pi+2a}{10}+\frac{2\pi}{5}k$ con $a \in R$. 1672. $\varnothing$ con $a \neq 1$; $x \in Z$ con $a = 1$. 1673. $\varnothing$
con $a \neq \frac{4n}{4k+1}$; $\frac{\pi}{2}+2\pi k$ con $a = \frac{4n}{4k+1}$. 1674. $\varnothing$ con $a < -5$, $a > 3$;

$(-1)^k \operatorname{arcsen}(-2+\sqrt{4-a})+\pi k$ con $-5\leqslant a\leqslant 3$. 1675. $\varnothing$ con $a<-4$, $a>2$; $\pm\arccos\frac{3-\sqrt{9-4a}}{2}+2\pi k$ con $-4\leqslant a\leqslant 2$. 1676. $\varnothing$ con $a<-\sqrt{2}$, $a>\sqrt{2}$; $\pm\frac{1}{2}\arccos(3-2\sqrt{3-a^2})+\pi k$ con $-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$ 1677. $\frac{\pi}{4}+2\pi k$ con $a=\sqrt{2}$; $\frac{5\pi}{4}+2\pi k$ con $a=-\sqrt{2}$; $\frac{\pi}{4}+\pi k$ con $\begin{cases} a\neq\sqrt{2}\\ a\neq-\sqrt{2}.\end{cases}$ 1678. $\varnothing$ con $a=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$; $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$ con $a=\pi n$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$ con $\begin{cases} a\neq\pi n\\ a\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}m.\end{cases}$

1679. $\varnothing$ con $a=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\frac{3\pi}{4}+\pi n<a<\frac{5\pi}{4}+\pi n$; $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}a\pm\sqrt{\operatorname{tg}^2 a-1})+\pi k$ con $\frac{\pi}{4}+\pi n\leqslant a<\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\frac{\pi}{2}+\pi n<a\leqslant\frac{3\pi}{4}+\pi n$. 1680. $\varnothing$ con $-2<a<2$; $\pm\arccos\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}+2\pi k$ con $a\leqslant-2$; $\pm\arccos\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}+2\pi k$ con $a\geqslant 2$. 1681. $\varnothing$ con $\varphi+2\pi n<a<\pi-\varphi+2\pi n$; $\operatorname{arctg}\frac{\cos a\pm\sqrt{\cos^2 a-\operatorname{sen}a}}{\operatorname{sen}a}+\pi k$ con $-\pi-\varphi+2\pi n\leqslant a\leqslant\varphi+2\pi n$ $\left(\varphi=\operatorname{arcsen}\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$. 1682. $\varnothing$ con $a=-1$; 1 con $a\neq-1$. 1683. $\varnothing$ con $a\leqslant 0$, $a=1$; $\pm\sqrt{\frac{2}{a}}$ con $\begin{cases} a>0\\ a\neq 1.\end{cases}$ 1684. πk con $a<-\frac{5}{4}$, $a>5$; $x_1=\pi k$, $x_2=\pm\arccos\frac{-1\pm\sqrt{4a+5}}{4}+2\pi k$ con $-\frac{5}{4}\leqslant a<1$; $x_1=\pi k$, $x_2=\pm\arccos\frac{-1+\sqrt{4a+5}}{4}+2\pi k$ con $1<a\leqslant 5$. 1685. $-\frac{\pi}{4}+\pi k$ con $a<-\frac{2}{3}$, $a>2$; $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=\frac{1}{2}(-1)^k\operatorname{arcsen}\frac{2a}{a+2}+\frac{\pi}{2}k$ con $-\frac{2}{3}\leqslant a\leqslant 2$. 1686. $\varnothing$ con $a<\frac{-1-\sqrt{10}}{2}$, $a>\frac{-1+\sqrt{10}}{2}$; $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x_2=-\operatorname{arctg}3+\pi k$ con $a=1$; $\operatorname{arctg}\frac{-1\pm\sqrt{-4a^2-4a+9}}{2(a-1)}+\pi k$ con $\frac{-1-\sqrt{10}}{2}\leqslant a<1$, $1<a\leqslant\frac{-1+\sqrt{10}}{2}$. 1687. $\varnothing$ con $\begin{cases} b=2\pi k\\ a\neq 0;\end{cases}$ $(t;\ b-t)$ donde $t\in R$, con $\begin{cases} b=2\pi k\\ a=0;\end{cases}$ $\varnothing$ con $\begin{cases} b\neq 2\pi k\\ \left|\frac{a}{2\operatorname{sen}\frac{b}{2}}\right|>1;\end{cases}$ $\left(\frac{b+\alpha}{2}+2\pi k;\ \frac{b-\alpha}{2}-2\pi k\right)$, $\left(\frac{b-\alpha}{2}+2\pi k;\ \frac{b+\alpha}{2}-2\pi k\right)$, donde $\alpha=2\arccos\frac{a}{2\operatorname{sen}\frac{b}{2}}$, con $\begin{cases} b\neq 2\pi k\\ \left|\frac{a}{2\operatorname{sen}\frac{b}{2}}\right|\leqslant 1.\end{cases}$ 1688. $\varnothing$ con $\begin{cases} a\neq 0\\ b=2\pi k\end{cases}$ y con $\begin{cases} b\neq 2\pi k\\ \left|\frac{a}{2\operatorname{sen}\frac{b}{a}}\right|>1;\end{cases}$ $(t;\ b-t)$, donde $t\in R$, con $\begin{cases} a=0\\ b=2\pi k;\end{cases}$

$\left(\frac{b+\alpha}{2}+2\pi k;\ \frac{b-\alpha}{2}-2\pi k\right)$, $\left(\frac{b-\alpha}{2}+\pi+2\pi k;\ \frac{b+\alpha}{2}-\pi-2\pi k\right)$, donde $\alpha=-2\ \operatorname{arcsen}\dfrac{a}{2\operatorname{sen}\frac{b}{2}}$, con $\begin{cases} b\neq 2\pi k \\ \left|\dfrac{a}{2\operatorname{sen}\frac{b}{2}}\right|\leqslant 1.\end{cases}$ 1689. $\varnothing$ con $|2a+\cos b|>1$; $\left(\frac{b+\alpha}{2}+\pi k;\ \frac{b-\alpha}{2}-\pi k\right)$, $\left(\frac{b-\alpha}{2}+\pi k;\ \frac{b+\alpha}{2}-\pi k\right)$, donde $\alpha=\arccos(2a+\cos b)$, con $|2a+\cos b|\leqslant 1$. 1690. $\varnothing$ con $|2a-\operatorname{sen} b|>1$; $\left(\frac{b+\alpha}{2}+\pi k;\ \frac{b-\alpha}{2}-\pi k\right)$, $\left(\frac{\pi+b-\alpha}{2}+\pi k;\ \frac{-\pi+b+\alpha}{2}-\pi k\right)$, donde $\alpha=\operatorname{arcsen}(2a-\operatorname{sen} b)$, con $|2a-\operatorname{sen} b|\leqslant 1$. 1691. $\varnothing$ con $\begin{cases} a\neq 0 \\ b=\pi k\end{cases}$ y con $\begin{cases} b\neq \pi k \\ \left|\dfrac{a}{\operatorname{sen} b}\right|>1;\end{cases}$ $(t;\ b-t)$, donde $t\in R$, con $\begin{cases} b=\pi k \\ a=0;\end{cases}$ $\left(\frac{b+\alpha}{2}+\pi k;\ \frac{b-\alpha}{2}-\pi k\right)$, $\left(\frac{\pi+b-\alpha}{2}+\pi k;\ \frac{-\pi+b+\alpha}{2}-\pi k\right)$, donde $\alpha=\operatorname{arcsen}\dfrac{a}{\operatorname{sen} b}$, con $\begin{cases} b\neq \pi k \\ \left|\dfrac{1}{\operatorname{sen} b}\right|\leqslant 1.\end{cases}$ 1692. $\varnothing$ con $a<-\frac{1}{4}$, $a>\frac{1}{4}$; $((\alpha+\pi(k+n);\ -\beta+\pi(k-n))$, $((\beta+\pi(k+n);\ -\alpha+\pi(k-n))$, $(-\beta+\pi(k+n);\ \alpha+\pi(k-n))$, $(-\alpha+\pi(k+n);\ \beta+\pi(k-n))$, donde $\alpha=\dfrac{\arccos 4a+\arccos 2a}{2}$, $\beta=\dfrac{\arccos 4a-\arccos 2a}{2}$, con $-\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant\frac{1}{4}$. 1693. $\varnothing$ con $a<-\frac{1}{3}$, $a>\frac{1}{3}$; $(\alpha+\pi(k+n);\ \beta+\pi(k-n))$, $\left(\frac{\pi}{2}+\beta+\pi(k+n);\ -\frac{\pi}{2}+\alpha+\pi(k-n)\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}-\beta+\pi(n+k);\ \frac{\pi}{2}-\alpha+\pi(n-k)\right)$, $(\pi-\alpha+\pi(n-k);\ \pi-\beta+\pi(n-k))$, donde $\alpha=\dfrac{\operatorname{arcsen} 3a+\operatorname{arcsen} a}{2}$, $\beta=\dfrac{\operatorname{arcsen} 3a-\operatorname{arcsen} a}{2}$, con $-\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{1}{3}$. 1694. $\varnothing$ con $\begin{cases} a=0 \\ b\neq\pi k\end{cases}$ y con $\begin{cases} a\neq 0 \\ \left|\dfrac{2\operatorname{sen} b}{a}+\cos b\right|>1;\end{cases}$ $(t;\ b-t)$, donde $t\in R$, con $\begin{cases} a=0 \\ b=\pi k,\end{cases}$ $\left(\frac{b+\alpha}{2}+\pi k;\ \frac{b-\alpha}{2}-\pi k\right)$, $\left(\frac{b-\alpha}{2}+\pi k;\ \frac{b+\alpha}{2}-\pi k\right)$, donde $\alpha=\arccos\left(\frac{2\operatorname{sen} b}{a}+\cos b\right)$, con $\begin{cases} a\neq 0 \\ \left|\dfrac{2\operatorname{sen} b}{a}+\cos b\right|\leqslant 1.\end{cases}$ 1695. $\varnothing$ con $a\neq 0$; $\left(\frac{\pi}{2}+\pi(k+n);\ \frac{\pi}{2}(k-n)\right)$ con $a=0$. 1696. $\varnothing$ con $a\neq\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$; $\left(\frac{a}{2}+\pi k;\ -\frac{a}{2}+\pi k\right)$ con $a=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$; $\left(\frac{\pi+a}{2}+\pi k;\ \frac{\pi-a}{2}+\pi k\right)$ con $a=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$. 1697. $\varnothing$ con $a<-\frac{1}{2}$, $a>\frac{1}{2}$; $((-1)^{k+1}\operatorname{arcsen} a+\pi k;\ (-1)^n\operatorname{arcsen} 2a+\pi n)$, $((-1)^k\times\operatorname{arcsen} 2a+\pi k)$, $(-1)^{n+1}\operatorname{arcsen} a+\pi n)$ con $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$. 1698. $\varnothing$ $a<\frac{3}{2}$; $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi k$ con $a=\frac{3}{2}$; $\operatorname{arcctg}\dfrac{-1+\sqrt{2a-3}}{2}+\pi k<x<$

$> \operatorname{arcctg} \frac{-1-\sqrt{2a-3}}{2} + \pi k$ con $a > \frac{3}{2}$. 1699. $\varnothing$ con $a < \frac{3}{2}$; $\frac{\pi-\alpha}{2} + \pi k$ con $a = \frac{3}{2}$; $\begin{cases} \frac{\beta-\alpha}{2} + \pi k \leqslant x \leqslant \pi - \frac{\beta+\alpha}{2} + \pi k \\ x \neq \pi n \end{cases}$ con $a > \frac{3}{2}$ $\left(\alpha = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+4}};\ \beta = \arccos \frac{a-4}{\sqrt{a^2+4}}\right)$. 1700. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x \leqslant -\arccos \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2} + 2\pi k$, $\arccos \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2} + 2\pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ con $a < 0$; $\pi + 2\pi n$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ con $a = 0$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\arccos \frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2} + 2\pi k \leqslant x \leqslant 2\pi - \arccos \frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2} + 2\pi k$ con $a > 0$.

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica, manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

V. Butúzov

ANALISIS MATEMÁTICO. PROBLEMAS Y EJERCICIOS

El presente libro de texto está escrito por el colectivo de los profesores de la facultad de física de la Universidad Estatal Lomonósov de Moscú, a base de la experiencia de muchos años de conferencias y seminarios en el campo del análisis matemático. A pesar de su volumen bastante reducido, esta colección reúne un material rico correspondiente a casi todos los apartados del análisis matemático de la función de una variable.

Según cada apartado los autores exponen nociones teóricas básicas con la interpretación física de los conceptos a introducir. Luego, dan preguntas de control según la teoría que contribuyen a la asimilación no formal de conceptos teóricos. Les siguen los ejemplos de solución de problemas, tanto típicos como originales, que atraen la atención del estudiante a los aspectos de mayor importancia, por ejemplo, a las condiciones de aplicabilidad de uno u otro teorema o fórmula.

Este trabajo se caracteriza por un alto nivel científico y metodológico, combinando la rigurosidad matemática con la exposición viva y comprensible del material. Se recomienda a los estudiantes de los centros de enseñanza técnica superior, en particular a los que cursan las especialidades de la física.

N. Krasnov

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE AERODINÁMICA

Este manual da a conocer los problemas actuales de la aerodinámica relacionados, fundamentalmente, con el cálculo de parámetros aerodinámicos de los aparatos de vuelo en un amplio diapasón de velocidades (desde los subsónicos hasta los grandes supersónicos). El material teórico se expone en forma de problemas y ejercicios. Las respuestas contienen las conclusiones teóricas principales y la descripción de los algoritmos según apartados correspondientes de la aerodinámica (cinemática y dinámica de los gases, teoría de saltos de compresión, aerodinámica estacionaria y no estacionaria de las alas y los cuerpos de rotación, interferencia aerodinámica, dispositivos de timón, rozamiento, termotransferencia, aerodinámica de medios enrarecidos).

El material del libro ampliamente ilustrado con datos experimentales y de cálculo obtenidos ultimamente como resultado de investigaciones de flujos de líquido y de gas, permite conocer los principios, procedimientos y métodos más divulgados de solución de los problemas aerodinámicos ingenieriles con la aplicación de ordenadores. Se brindan esquemas-bloques y programas de cálculo para la solución de algunos problemas.

Este trabajo puede ser útil e interesante para un amplio círculo de trabajadores científicos, ingenieros y técnicos. Asimismo, lo pueden usar estudiantes y profesores de correspondientes especialidades de las Universidades y de otros centros de enseñanza técnica superior.

K. A. Rýbnikov

ANÁLISIS COMBINATORIO. PROBLEMAS Y EJERCICIOS

Todos aquellos quien hoy día emplean en su trabajo métodos matemáticos se encuentran con la necesidad de resolver problemas de carácter combinatorio. A los problemas de tal índole se reducen, por ejemplo, investigaciones de los circuitos eléctricos y esquemas electrónicos, de los sistemas de organización y dirección de la producción, de los flujos de transporte e información, de la construcción y explotación de la mayor parte de los ordenadores y varios otros.

El manual en consideración tiene por objeto ayudar a dominar la técnica de resolución de los problemas combinatorios y los hábitos de investigación de los problemas teóricos correspondientes. Están incluidos en él cerca de 1000 problemas y ejercicios. La mayoría abrumadora de ellos viene dotada de respuestas, soluciones o indicaciones referentes a su resolución.

Aunque las construcciones combinatorias son diversas y específicas, se analizan, sin embargo, desde las posiciones teóricas unificadas.

El manual será útil no sólo para los estudiantes o autodidactas, sino también para el amplio círculo de especialistas que tienen una alta preparación matemática